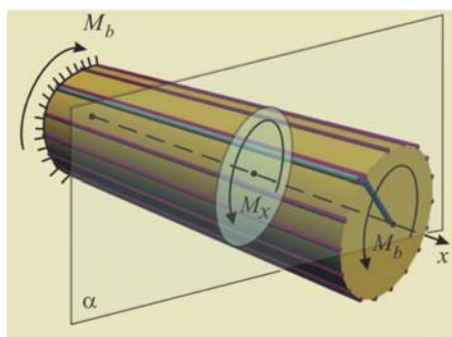
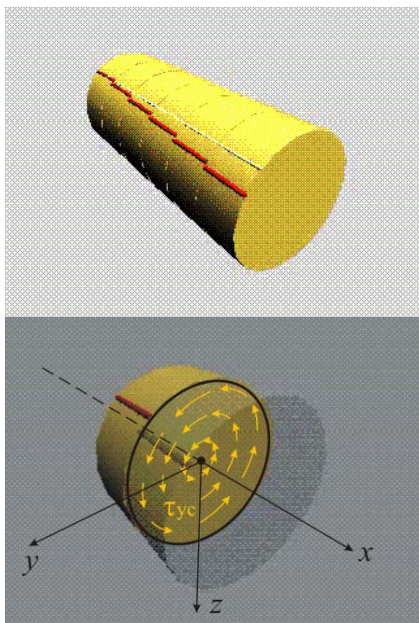


19. УСУКВАНЕ

Тангенциални напрежения при усукване на вал с кръгло напречно сечение



Фиг.1



Фиг.2

Когато в напречното сечение от възможните шест разрезни усилия действа само усукващият момент M_x , материалът оказва съпротива на усукване. На такава съпротива са подложени конструктивни елементи, наречени *валове*, които предават въртящ момент.

Един пример на вал с кръгло напречно сечение е показан на фиг.1. Върху десния свободен край на вала е приложен съсредоточен въртящ момент около оста x , който валът предава на опората в левия край. Ако направим разрез на вала с равнина α , перпендикулярна на оста му, единственото разрезно усилие, което ще се формира от външния въртящ момент M_b , е усукващ момент M_x . Необходимо е да бъде изведен изчислителен апарат за определяне на напреженията, които това разрезно усилие ще предизвика.

За да се илюстрира формирането на междучастичните сили при този вид външно въздействие, гредата се представя като съставена от множество тънки дискове, притиснати един към друг. Въртящият момент се стреми да завърти дисковете, като ги плъзне един спрямо друг. На това

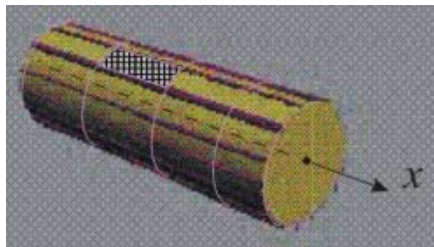
завъртане противодействат сили на триене, действащи в повърхнините, по които дисковете контактуват (контактните повърхнини).

Като аналог на дисковете от модела в реалните тела могат да бъдат приети отделните слоеве на частичките, които изграждат материала на изделието. Тогава аналог на силите на триене ще бъдат междучастичните

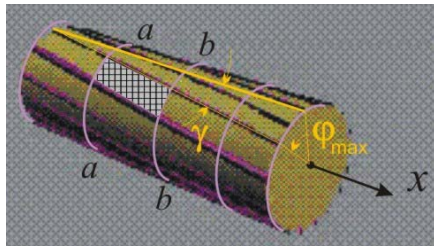
сили. Тези сили лежат в равнината на направеното сечение и се представят с тангенциални напрежения τ_{yc} (“ yc ” – усукване, фиг.2).

За да намерим разпределението на напреженията в точките от напречното сечение, отстоящо на дадено разстояние x от левия край на вала, ще използваме съществуващата от закона на Хук зависимост между тангенциалното напрежение τ и ъгловата деформация γ (**физична страна на проблема**):

$$\tau = G \gamma \quad (1)$$



a)



b)

Фиг.3

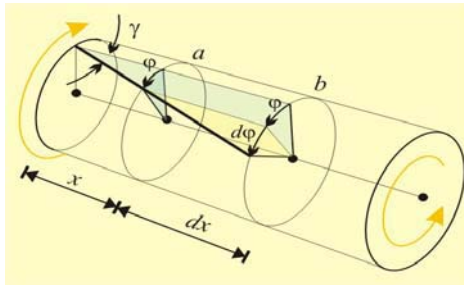
В този израз коефициентът G е материална характеристика и се смята за известен – определен при експериментално изследване на материала. Така, за да бъде определено напрежението, остава да бъде определена ъгловата деформация γ . За целта ще проследим процеса на деформиране на гредата (вала) при усукване (**геометрична страна на проблема**). Върху повърхнината на вала, преди да бъде натоварен, е нанесена ортогонална мрежа, образувана от прави линии, успоредни на оста x , и от перпендикулярни на тях окръжности (фиг. 3a). След натоварването се установява (фиг. 3 b), че

окръжностите запазват вида си, докато правите линии се превръщат във винтови линии. Правоъгълните преди натоварването елементи (на фиг. 3a един от тях е заштрихован) се преобразуват в успоредници (фиг. 3 b). Такова поведение на деформация ще има един модел на вал, състоящ се от корави дискове (напречни сечения), които при натоварването на вала се завъртат един спрямо друг, без да се изкорубват (депланират). Така на фиг. 3 b свободният край на вала, т.е. най-дясното му сечение се завърта спрямо неподвижно запънатото сечение на ъгъл φ_{max} . Ъгълът на наклона на винтовите линии е постоянен и представлява изменението на правия ъгъл, т.е. равен е на ъгловата деформация γ .

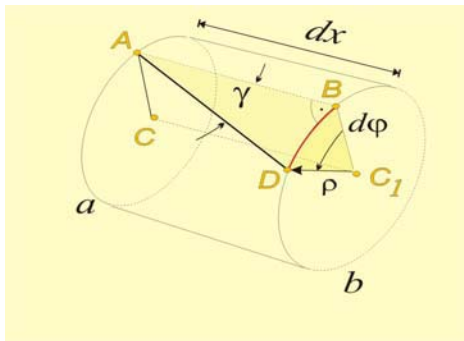
Ще припомним, че подобно допускане за равнинност на напречните сечения при настъпилите деформации използвахме и при опън (натиск). Това беше хипотезата на Бернули. Разбира се, при опън (натиск) оставащите равнинни (плоски) напречни сечения се изместват по направление на оста x , докато при усукването те се завъртат около нея без да променят разстоянията помежду си.

Експериментът показва, че хипотезата на Бернули не е валидна при всички форми на напречно сечение на вала. Например усукването на вал с правоъгълно сечение е свързано с деформация на напречното сечение. Хипотезата може да бъде приета при валове с напречно сечение кръг или кръгов пръстен (тръбовидно сечение).

Като се използва хипотезата за равнинните сечения, ще може да се намери деформационното условие при често усукване. За целта се разглежда безкрайно малкият елемент от вала, заключен между сеченията a и b (фиг.3 и фиг.4). Сечението a , отстоящо на разстояние x от мястото на запъването, се завърта на ъгъл φ , наречен ъгъл на усукване. Сечението b , отстоящо на разстояние dx от a , е завъртяно спрямо неподвижното сечение на ъгъл $\varphi+d\varphi$, т.е. ъгълът на завъртане на b спрямо a е $d\varphi$. На фигурата е



Фиг.4



Фиг.5

показан и постоянният ъгъл на наклона γ на една от винтовите линии, изобразени на фиг. 3б.

На фиг. 5 безкрайно малкият елемент на вала, заключен между двете сечения a и b , е показан отделно. Точките А и В са от правата линия, нанесена върху повърхността на вала преди натоварването му. След натоварването тази права става винтова линия, като за разглеждания безкрайно малък елемент това е правата AD, наклонена под ъгъл γ . В правоъгълния $\triangle ABD$ дъгата BD може да бъде приета за катет и да бъде изразена като

$$BD = AB \operatorname{tg} \gamma \quad (2)$$

Същата дъга може да бъде изразена и като дъга с централен ъгъл $d\varphi$ от сечението b с радиус ρ :

$$BD = \rho d\varphi . \quad (3)$$

Като се вземе предвид, че $AB = dx$ и че за безкрайно малък ъгъл γ може да се приеме $tg\gamma \approx \gamma$, от (2) и (3) следва, че

$$AB \, tg\gamma = \rho \, d\varphi, \quad dx \, \gamma = \rho \, d\varphi \quad \text{и} \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (4)$$

Изразът $\frac{d\varphi}{dx}$ представлява ъгъл на усукване за единица дължина от вала и се нарича *относителен ъгъл на усукване* θ , т.е.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5)$$

Така от (4) и (5) получаваме

$$\gamma = \rho \theta. \quad (6)$$

Като се замести изразът (6) (**получен при анализ на геометричната страна на проблема**) в израза (1) (**от физичната страна на проблема**), се получава:

$$\tau = G \rho \theta. \quad (7)$$

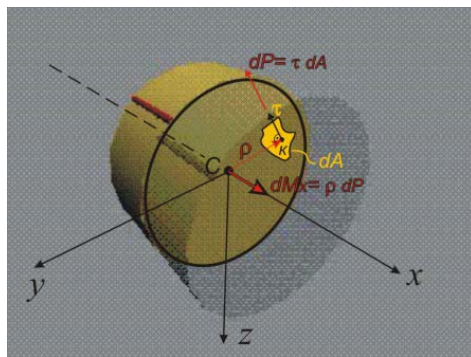
Полученият израз може да бъде използван за изчисляване на напреженията само ако е известен относителният ъгъл на усукване θ . Този ъгъл може да бъде определен от третата, **статична страна на проблема**. Тя се изразява в положението, че редуцията на напреженията в точките от сечението спрямо оста x има за резултат само един момент, който трябва да бъде равен на усукващия момент dM_x .

На фиг.6 е показан безкрайно малкият елемент с лице dA , описан около т.К, намираща се на разстояние ρ от центъра С на напречното сечение. Тангенциалното напрежение, действащо в безкрайно малката околност на т.К, формира безкрайно малка сила

$$P = \tau \, dA. \quad (8)$$

Тази сила формира спрямо оста x безкрайно малък момент

$$dM_x = \rho \, dP. \quad (9)$$



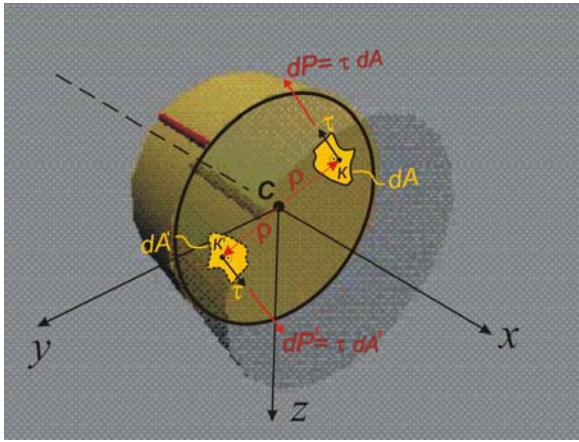
Фиг.6

Пълният момент на напрежението в цялото сечение се получава, като изразът от (9) се интегрира по цялата площ на сечението:

$$M_x = \int_A dM_x = \int_A \rho dP,$$

и окончателно

$$M_x = \int_A \rho \tau dA. \quad (10)$$



Фиг.7

Поради осовата симетрия на всяка елементарна площ dA може да се намери съответстваща площ dA' , намираща се от другата страна на т.С (фиг.7). В тази площ напрежението ще формира елементарна сила dP' , равна по големина на dP , но с противоположна посока, така че $dP + dP' = 0$.

В резултат за главния вектор при редукцията ще се получи $R = \int_A dP = 0$.

Като се замести (7) в (10) се получава:

$$M_x = \int_A \rho \tau dA = \int_A \rho (G \rho \theta) dA = G \theta \int_A \rho^2 dA$$

Интегралът $\int_A \rho^2 dA = I_C$ представлява полярен инерционен момент за т.С, така че за усукващия момент се получава

$$M_x = G \theta I_C,$$

откъдето

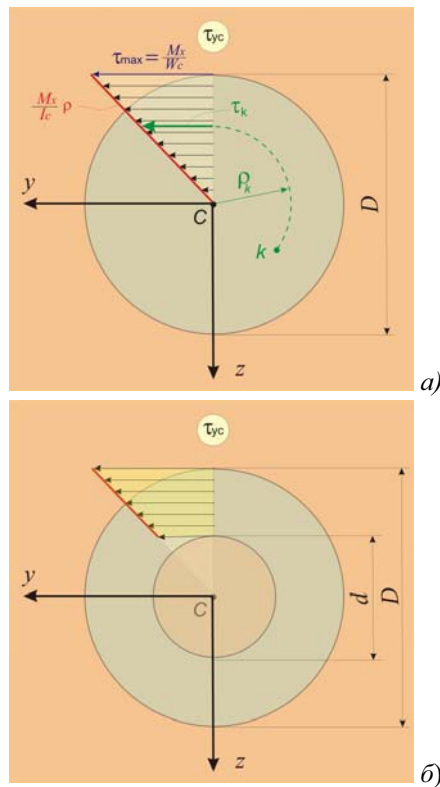
$$\theta = \frac{M_x}{G I_C}. \quad (11)$$

Сега вече е възможно уравнение 7 да бъде използвано за определяне на напреженията, след като относителният ъгъл на усукване бъде заместен по уравнение 11:

$$\tau = G \rho \frac{M_x}{G I_C}, \text{ или } \tau = \frac{M_x}{I_C} \rho. \quad (12)$$

В последната зависимост I_C е геометрична характеристика на сечението. За кръгло напречно сечение с диаметър D се получава, че

$$I_C = \frac{\pi D^4}{32}.$$



Фиг. 8

От (12) следва, че тангенциалното напрежение τ в дадена точка от сечението е линейна функция на разстоянието ρ на точката до центъра на сечението. На фигури 8а и 8б са показани диаграмите на тангенциалните напрежения при кръг и при кръгов пръстен.

Най-голямото значение за напрежението се получава в точките от контура на сечението, за които $\rho = \rho_{\max} = D/2$. При тях

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{J_c} \rho_{\max} = \frac{M_x}{\frac{J_c}{\rho_{\max}}} = \frac{M_x}{W_c}$$

където $W_c = \frac{J_c}{\rho_{\max}}$ е също една геометрична характеристика на сечението, наречена *полярен съпротивителен момент*.

При кръгло напречно сечение с диаметър D за полярния съпротивителен момент се получава

$$W_c = \frac{\pi D^3}{16}.$$

При напречното сечение кръгов пръстен (фиг. 8б) имаме

$$W_c = \frac{\frac{\pi D^4}{32}(1-\chi)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\chi^4),$$

където $\chi = \frac{d}{D}$.

Деформация на вал с кръгло напречно сечение

Вече беше установено, че относителният ъгъл на усукване θ се дава от следния израз:

$$\theta = \frac{M_x}{GI_c}.$$

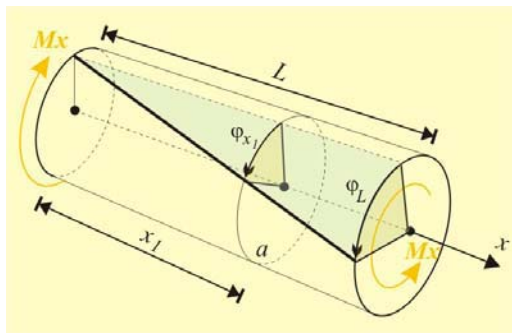
Ъгълът на усукване φ може да бъде получен, като се вземе под внимание изразът (5) :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}.$$

От двете уравнения получаваме

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_c}, \quad \text{откъдето } d\varphi = \frac{M_x}{GI_c} dx. \quad (1)$$

Уравнение (1) се нарича *диференциално уравнение за усукване* на вал с кръгло напречно сечение. Чрез неговото интегриране може да се определи



Фиг. 1

ъгълът на усукване за произволно сечение от вала спрямо друго избрано сечение. Например (фиг.1) ъгълът на усукване на сечението a , отстоящо на разстояние x_1 от най-лявото неподвижно сечение на вала ще бъде

$$\varphi(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{M_x}{GJ_c} dx.$$

Ако в даден участък $0 \leq x \leq L$, усукващият момент е постоянен и напречното сечение, съответно I_c , не се изменя (както е случаят на фиг.1), то те могат да бъдат извадени пред интеграла, така че се получава

$$\varphi(x_1) = \frac{M_x}{GJ_c} \int_0^{x_1} dx = \frac{M_x x_1}{GJ_c} \quad \text{и} \quad \varphi(L) = \frac{M_x}{GJ_c} \int_0^L dx = \frac{M_x L}{GJ_c}$$

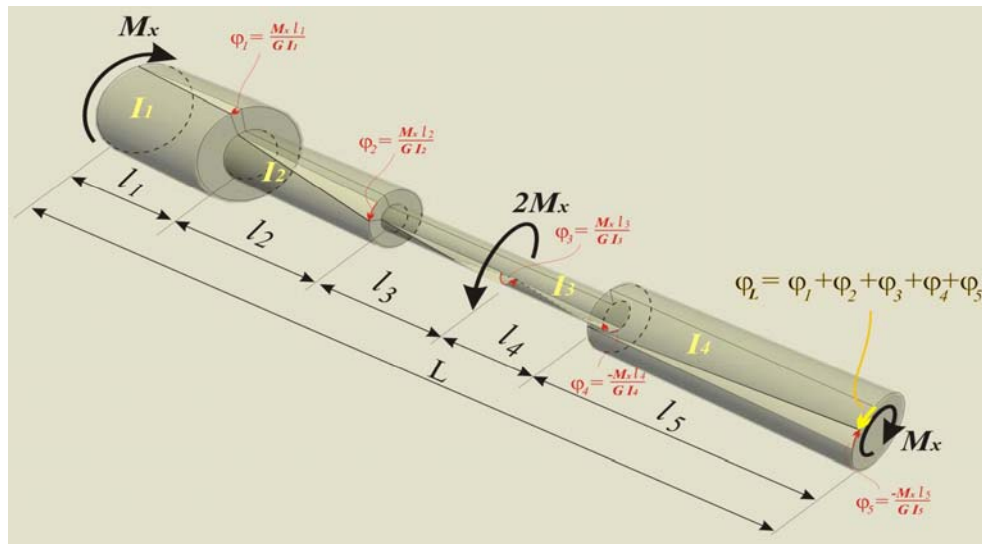
На фиг.1 $\varphi(L) = \varphi_{\max}$, т.е. това е ъгълът на усукване на крайното дясно сечение на показания вал.

Произведението $G I_c$ се нарича *коравина при усукване*, аналогично на коравината при опън EF .

Ако имаме вал с дължина L и няколко участъка, всеки един с дължина l_i , като във всеки участък съответните усукващи моменти M_{ix} и коравини $G_i I_{ic} = G I_{ic}$ са постоянни, ъгълът на завъртане на крайното дясно сечение спрямо крайното ляво сечение ще се намери по формулата (фиг.2):

$$\varphi(L) = \frac{M_{1x} l_1}{GJ_{1c}} + \frac{M_{2x} l_2}{GJ_{2c}} + \dots + \frac{M_{nx} l_n}{GJ_{nc}} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{ix} l_i}{GJ_{ic}} \quad (2)$$

В това уравнение усукващите моменти трябва да се заместят с алгебричните им стойности, взети от M_x – диаграмата.



Фиг.2

Якостно и деформационно условие при усукване на вал

Якостното условие, гарантиращо определена сигурност по отношение достигането на опасно състояние на вала, ще бъде максималното тангенциално напрежение τ_{max} да е по-малко или най-много равно на допустимото тангенциално напрежение $\tau_{доп}$ на материала, от който е изработен валът.

$$\tau_{max} \leq \tau_{доп} . \quad (1)$$

Също както допустимото нормално напрежение $\sigma_{допир}$, и допустимото тангенциално напрежение $\tau_{доп}$ е опитно намерена величина. Най-общо можем да отбележим, че при крехки материали $\tau_{доп} \approx 0,75 \sigma_{доп}$, а при жилаво-пластични материали $\tau_{доп} \approx 0,6 \sigma_{доп}$.

Напрежението τ_{max} се дава от уравнението

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_c} , \quad (2)$$

като за M_x се взима максималното значение на усукващия момент (значението на M_x в застрашеното сечение от вала), определено от M_x – диаграмата.

Замествайки (2) в (1), ще получим якостното условие

$$\max \tau = \frac{M_x}{W_c} \leq \tau_{доп} . \quad (3)$$

Както при изделията, натоварени на опън (натиск) или огъване, и тук можем да определим две основни задачи:

- за определяне на диаметъра на вала (оразмерителна задача);
- за определяне на максимално допустимото натоварване или за проверка на якостта при усукване (проверовъчна задача).

При решаване на първия тип задачи, когато трябва да се определи сечението на вала, от (3) получаваме

$$\frac{M_x}{W_c} \leq \tau_{доп} \rightarrow W_c \geq \frac{M_x}{\tau_{доп}} .$$

Като се вземе под внимание, че за кръгло напречно сечение съпротивителният момент е

$$W_c = \frac{\pi D^3}{16} ,$$

за диаметъра D се получава:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi \tau_{доп}}} \quad (4)$$

При напречното сечение кръгов пръстен съпротивителният момент е

$$W_c = \frac{\frac{\pi D^4}{32}(1-\chi)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\chi^4) , \quad \text{където } \chi = \frac{d}{D} ,$$

така че за диаметъра се получава

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi(1-\chi^4)\tau_{доп}}} \quad (5)$$

В някои случаи експлоатационната годност на вала трябва да се гарантира, като се вземе под внимание деформационното условие

$$\theta_{max} \leq \theta_{доп}, \quad (6)$$

където $\theta_{доп}$ е допустимият относителен ъгъл на усукване, който се изчислява по формулата

$$\theta = \frac{M_x}{G I_C}. \quad (7)$$

Ако изразът (7) се замени в деформационното условие (6), за застрашеното сечение, ще се получи

$$\theta_{max} = \frac{M_x}{G I_C} \leq \theta_{доп}. \quad (8)$$

Като се вземе под внимание, че за кръгло сечение полярният инерционен момент е $I_C = \frac{\pi D^4}{32}$, а за тръбовидно - $I_C = \frac{\pi D^4}{32}(1-\chi)$, могат да бъдат получени формули за оразмеряване, аналогични на (4) и (5):

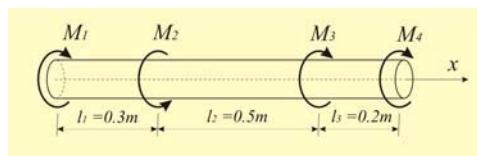
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{\pi G \theta_{доп}}}; \quad (9)$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{\pi G(1-\chi^4)\theta_{доп}}}. \quad (10)$$

Когато към вала се предявяват както якостни, така и деформационни изисквания, пресмятанията се правят и по двете условия. Например за вал с кръгло напречно сечение диаметърът се изчислява и по (4), и по (9), и като резултат се взема по-големият от двата. В случаите, когато не се поставят изисквания по отношение на деформацията, се изхожда само от якостното условие например, диаметърът се изчислява само по (4) за вал с кръгло напречно сечение, съответно по (5) вал с пръстеновидно напречно сечение.

Пример за оразмеряване на вал:¹

На фиг.1 е показан стоманен вал с кръгло напречно сечение, натоварен с моментите $M_1=900Nm$, $M_2=3600Nm$, $M_3=1500Nm$, $M_4=1200Nm$. За избраната стомана модулетът на



Фиг. 1

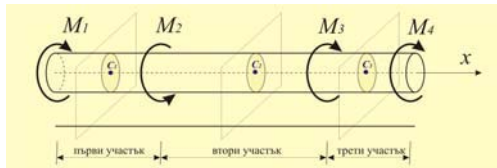
¹ По "Техническа механика", проф. К. Попов, КОЛОРПРИНТ, Варна, 1992г., стр.181

Ъгловите деформации е $G=0,8 \cdot 10^{11} Pa$; допустимото тангенциално напрежение е $\tau_{дон}=300 \cdot 10^5 Pa$ и допустимият относителен ъгъл на усукване - $\theta_{дон}=0,004 rad/m$.

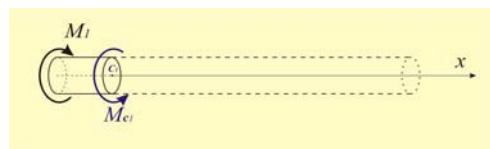
Иска се:

1. Да се начертае диаграмата на усукващия момент.
2. Да се пресметне диаметърът на вала.
3. Да се намери ъгълът на усукване между началното и крайното сечение на вала.

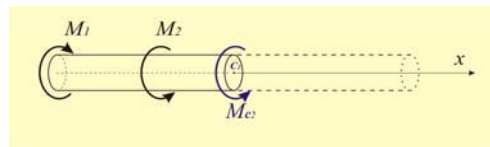
Решение:



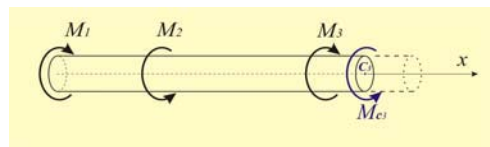
Фиг.2



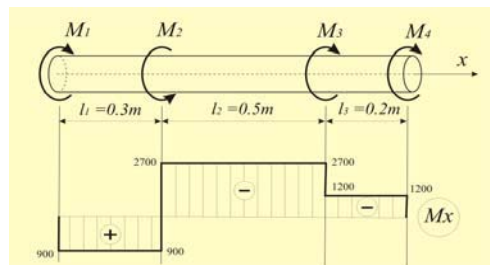
Фиг.3



Фиг.4



Фиг.5



Фиг.6

1. Гредата е натоварена с четири съсредоточени момента, които оформят три участъка (фиг.2). За определяне на разрезните усилия във всеки участък се прави разрез и се разглежда равновесието на лявата част на гредата:

- Първи участък (фиг.3)

$$\sum M_x = 0 \rightarrow -M_1 + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = M_1 \rightarrow M_{c1} = 900 N/m$$

- Втори участък (фиг.4)

$$\sum M_x = 0 \rightarrow -M_1 + M_2 + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = M_1 - M_2 \rightarrow M_{c2} = -2700 N/m$$

- Трети участък (фиг.5)

$$\sum M_x = 0 \rightarrow$$

$$-M_1 + M_2 - M_3 + M_{c3} = 0$$

$$M_{c3} = M_1 - M_2 + M_3 \rightarrow$$

$$M_{c3} = -1200 N/m$$

На фиг.6 е показана M_x - диаграмата, построена с получените стойности. Както се вижда, максималният усукващ момент е в средния участък и има стойност $2700 Nm$ (отрицателният знак на диаграмата показва посоката на въртене).

2. Нека най-напред пресметнем диаметъра, като изхождаме от якостното условие:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi\tau_{\text{дон}}}}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16.2700}{3,14.300.10^5}} = 7,7.10^{-2} \text{ [м]}.$$

Сега да пресметнем диаметъра на вала, като изхождаме от деформационното условие:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{\pi G \theta_{\text{дон}}}};$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32.2700}{3,14.0,004.0,8.10^{11}}} = 9,6.10^{-2} \text{ [м]}.$$

От двете намерени значения на диаметъра следва да вземем под внимание по-голямото. Нека изберем $D=10^{-1}m=10 \text{ cm}$. В такъв случай инерционният момент на сечението ще бъде

$$I_c = \frac{3,14}{32.10^4} = 9,8.10^{-6} \text{ [м}^4\text{]}.$$

3. Ъгълът на усукване между крайното и началното сечение на вала ще пресметнем по уравнението

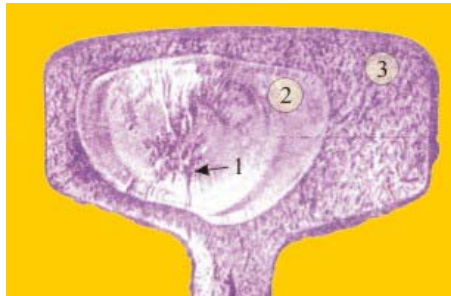
$$\varphi_{(L)} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{ix} l_i}{GI_{ic}} = \frac{M_{1x} l_1}{GI_{1c}} + \frac{M_{2x} l_2}{GI_{2c}} + \dots + \frac{M_{nx} l_n}{GI_{nc}}$$

$$\varphi = \frac{1}{GJ_c} \sum_1^3 M_{ix} l_i = \frac{1}{0,8.10^{11}.9,8.10^{-6}} (900.0,3 - 2700.0,5 - 1200.0,2) = 6.10^{-3} \text{ rad}$$



20. ЯКОСТ НА МАТЕРИАЛИТЕ ПРИ ПРОМЕНЛИВИ НАПРЕЖЕНИЯ¹

Въпросите в предишните теми, свързани с механичното поведение на деформируемите тела, бяха разгледани при предпоставка за статично действие на силите. При тази предпоставка силите нарастват от нула до пълната си стойност за продължително време (поне 5-10 сек) и остават с тази стойност през целия разглеждан период от време. Редица конструктивни елементи на машините и апаратите обаче в процеса на работа изпитват периодично променящи се с времето натоварвания и напрежения. Практиката показва, че механичното поведение на материалите в такъв режим на работа съществено се отличават от поведението им при статично натоварване. Елементи, подложени на периодично променящи се напрежения, се разрушават при значително по-малки стойности на напрежението, отколкото при статично натоварване. При това, след известен период от време, разрушението настъпва внезапно, без съществена пластична деформация. Първоначалните представи са свързали това явление с промяна на структурата и механичните свойства на материала и е било въведено понятието **умора на материала**. По-късно изследванията показват, че структурата на материала не се променя под действието на периодично променящи се напрежения. Механизмът на разрушаване в тези условия се обяснява със съществуването на микродефекти в структурата на материала, с наличието на микропукнатини, които с течение на времето се окрупняват, отслабват сечението и водят до разрушаване. Явлението по традиция продължава да се нарича умора на материала.



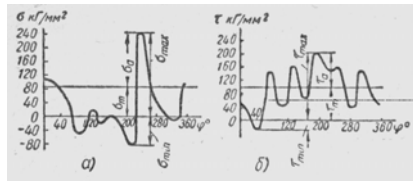
Фиг. 1

На фиг.1 е показан разрез на метална релса, в която има технологичен дефект – пукнатина 1. В сечението, където протича разрушаването, може ясно да се различат две зони: зона 2, с гладка, шлифована повърхност (зона на постепенно развитие на пукнатината), и зона 3, с грапава повърхност (зона на окончателно мигновено разрушаване вследствие на отслабване на сечението).

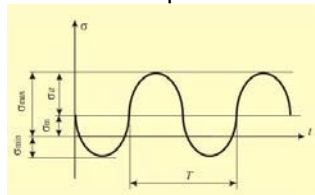
¹ Материалът е разработен по “Д. Панчовски, М. Попова, Приложна механика. ВХТИ, София, 1985” и “С. П. Андреевич, Спротивление материалов”, Высшая школа, М.,1966

Съществено значение за възникване и развитие на пукнатини на умора са не само вътрешноструктурните технологични дефекти на материала (пукнатини и включения), а и дефекти от повърхностната обработка на детайлите (грапавини, резки, пукнатини).

ВИДОВЕ ЦИКЛИ



фиг. 2



фиг. 3

В най-общ случай натоварването и напрежението в дадено сечение могат да се изменят във времето по произволен закон. На фиг.2 са представени кривите на изменение по времето на нормалното и тангенциалното напрежение в колянвия вал на дизелов двигател. Както се вижда, в рамките на един оборот напреженията се изменят по доста сложен закон.

Например нормалното напрежение (фиг.2а) в началото на движението започва да намалява и дори преминава в отрицателната (натискова) зона на диаграмата, след което рязко нараства до максимален опън и отново започва да намалява. При всеки следващ

оборот обаче това изменение се повтаря. Наблюдава се периодичност на напреженията. За опростяване на анализа законът на изменение най-често се свежда до периодична функция на времето t с период T (фиг.3). Съвкупността на всички стойности на напрежението за време един период се нарича *цикъл на напрежението*.

Цикълът на променливите напрежения има следните основни характеристики:

- максимално σ_{\max} и минимално σ_{\min} (по алгебрична стойност) напрежение на цикъла;
- средно напрежение $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$;
- амплитуда на цикъла $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$;
- коефициент на асиметрия на цикъла $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

Средното напрежение на цикъла може да бъде както положително, така и отрицателно. Амплитудата е винаги положителна.

От приведените изрази следва:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

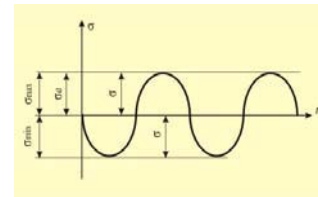
- Асиметричен цикъл

Ако напреженията σ_{\max} и σ_{\min} не са равни по абсолютна стойност и са различни от нула, цикълът се нарича *асиметричен*. Асиметричните цикли могат да бъдат знакопроменливи (фиг.3) и знаковостоянни (ако кривата на напреженията е изцяло над или изцяло под нулевата линия).

- Симетричен цикъл

Ако $\sigma_{\max} = \sigma$ и $\sigma_{\min} = -\sigma$, цикълът се нарича *симетричен* (фиг.4). За този вид цикли

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma \quad \text{и} \quad r = -1.$$

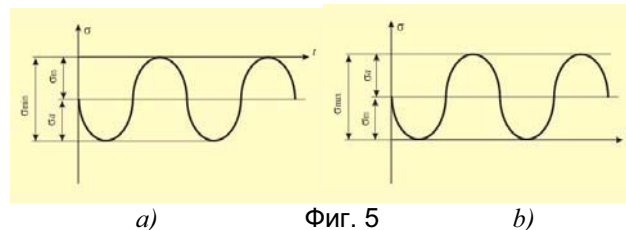


Фиг. 4

- Пулсиращ цикъл

Когато σ_{\max} или σ_{\min} са равни на нула, цикълът се нарича *пулсиращ* (фиг.5). За пулсиращия цикъл

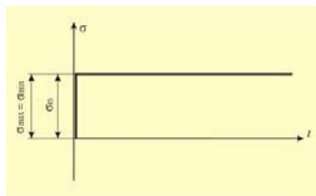
$$\sigma_a = \sigma_m; \quad r=0 \text{ (фиг.5a)} \quad \text{или} \quad r = \infty \text{ (фиг.5b)}.$$



Фиг. 5

Постоянното статично напрежение може да се разглежда като частен случай на променлив цикъл (фиг.6) с параметри

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma; \quad \sigma_a = 0; \quad r=1.$$



Фиг.6

Цикли, за които коефициентите на асиметрия имат еднакви стойности, се наричат *динамично подобни*.

Коефициентът на асиметрия r за различни видове цикли може да се променя от $-\infty$ до $+\infty$.

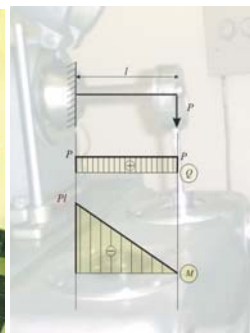
В случай на променливи тангенциални напрежения остават в сила всички термини и съотношения, като σ се заменя с τ .

ГРАНИЦА НА УМОРА. КРИВИ НА ВЪОЛЕР

За провеждане на якостни пресмятания (оразмерителни и проверовъчни) на детайли, подложени на периодично натоварване, е необходимо да се познават механичните характеристики на материалите в условия на променливи напрежения. Те се определят при специални изпитания на умора. Най-прости за изпълнение и най-широко разпространени са изпитанията при симетричен цикъл на натоварване.



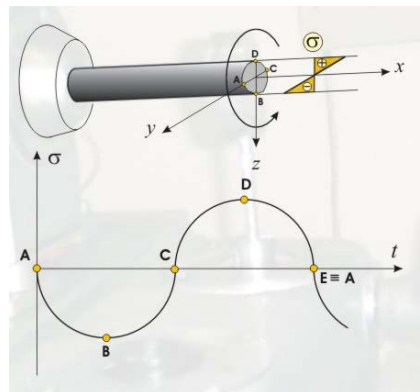
Фиг. 7



Фиг. 8

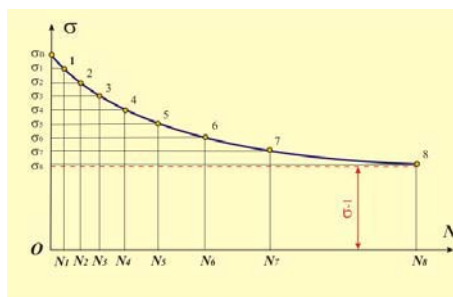
На фиг. 7 е представена машина за изпитание при симетричен цикъл, осъществен чрез огъване на въртящ се образец. Принципът на действие на машината е следният: образец 1 се закрепва в патрона 2 на въртящо устройство (електромотор). Чрез лагер 3 свободния край на образца се свързва с прът 4, който предава на образца силата на тежестта на дисковете 5. Статическата схема на образца, закрепен по описания начин е конзолна

гред, натоварена на огъване (фиг.8). При тази схема, точките по горната страна на образца са подложени на опън, по долната страна – на натиск, а в средното сечение на образца напреженията са нула (фиг.9). При завъртане на образца една точка от средното сечение (например т.А) ще се премести в положение В и ще попадне в натиснатата област (с отрицателни напрежения). При продължаване на въртенето точката ще попадне в положение С и напреженията отново ще станат нула. По-нататък точката ще навлезе в опънатата зона на образца и в т.Д ще получи максимални положителни напрежения. Така при едно завъртане на образца ще се формира един симетричен цикъл на натоварване. За показаната на фиг.7 машина броят на циклите автоматично се регистрира от брояча 6.



Фиг. 9

Опитите се провеждат в следната последователност: Подбират се от 6 до 8 еднакви образци, обикновено с диаметър от 6мм до 10мм и полирана повърхност. Първият образец се закрепя в машината, а с подходящ брой тежести в него се създава максимално напрежение σ_1 (1- първи образец), по-малко от разрушаващото напрежение при статично натоварване σ_B , но близко до него. При пускане на машината, образецът се разрушава след сравнително малко на брой цикли N_1 . На фиг. 10 този момент е изобразен с т.1. По-нататък се отстранява един от натоварващите дискове, така че във втория образец да се формира напрежение σ_2 , по-малко от σ_1 . Естествено е да се очаква този образец да се разруши при по-голям брой на циклите N_2 (т.2 на фиг. 10). След като се изпитат всички образци и експерименталните точки се съединят с гладка линия, се получава диаграма, която се нарича крива на умора или **крива на Вьолер**.



Фиг.10

Характерно за кривата на Вьолер е, че за повечето материали тя притежава асимптота, успоредна на оста ON . Тази асимптота определя максималното напрежение, което материалът издържа неограничен брой цикли при определен коефициент на асиметрия r . Това напрежение се нарича **граница на умора** на материала. Означава се със σ_r , където r е коефициентът на асиметрия на цикъла. Тъй като кривата на фиг. 10 беше получена при симетричен цикъл на натоварване, то получената граница на умора трябва да бъде означена като σ_{-1} .

Изпитанията при асиметричен цикъл изискват специални машини с много по-сложна конструкция от тази на машините за изпитване при симетричен цикъл.

При цветните метали кривата на Вьолер няма асимптота. Тук се въвежда понятието условна граница на якостна умора. За условна граница на умора се приема напрежението, при което образецът издържа 10^8 цикли.

Определянето на границата на якостна умора за даден материал е трудоемка операция. Поради това са направени редица опити да се намерят приблизителни, емпирични зависимости на границата на умора при симетричен цикъл σ_{-1} от кратковременната якост на материала σ_B . Например за въглеродна стомана $\sigma_{-1} = (0,40 \div 0,45) \sigma_B$; за чугун $\sigma_{-1} = 0,40 \sigma_B$; за цветни метали $\sigma_{-1} = (0,24 \div 0,50) \sigma_B$.

Освен от вида на материала границата на умора се влияе от редица други фактори, най-важните от които са:

- Формата на детайла. Границата на умора намалява при наличието на местно изменение на формата (удебеляване, утъняване, отвори) и свързаната с него концентрация на напреженията.
- Абсолютните размери. С увеличаване на размерите на детайлите границата на умора намалява. Това може да се обясни с факта, че колкото е по-голям обемът на материала, толкова по-голяма е вероятността в зоната на големите напрежения (в случая от фиг.9 – по периферията на кръглия образец) да попаднат структурни дефекти.
- Състояние и свойства на повърхностния слой. Повърхностните дефекти играят роля на концентратори на напреженията и значително намаляват границата на умора.

24. СЪДОВЕ ПОД НАЛЯГАНЕ



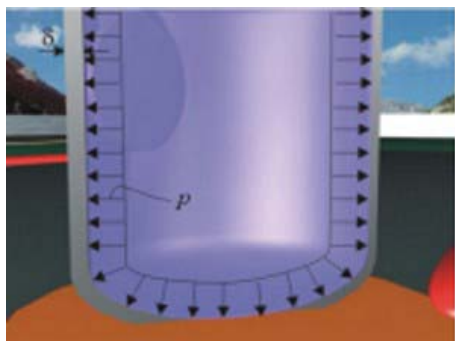
Фиг. 1

В машините и производствените инсталации на химическата и металургичната промишленост често се срещат елементи, които не могат да бъдат моделирани като греди или пръти. Такива са филтрите под налягане ①, реакторите ②, тръбите ③, резервоарите ④, бутилките за съгъстен газ и др. (фиг.1). Те са изградени от тела, ограничени от две повърхнини, разстоянието между които е малко в сравнение с останалите му размери. Тези тела се наричат *плочи*, ако ограничаващите повърхнини са равнинни, и *черупки*, ако те са произволни. **По-нататък в изложението ще бъдат разгледани съдове, изградени от тела, околната повърхнина на които е част от ротационна повърхнина** (осовосиметрични черупки). При тези съдове се приема, че липсват тангенциални разрезни усилия.

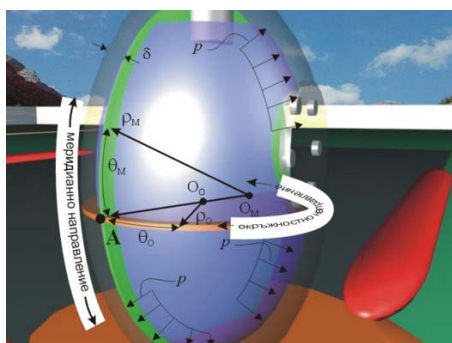
Осовосиметричните тела могат да бъдат разглеждани като получени от плъзгането на една крива, която задава меридианното направление, по окръжност (окръжно направление).



Формирането на разрезните усилия при черупките до голяма степен зависи и от дебелината на черупката. Когато тя е голяма, черупките се наричат *дебелостенни* и при тях в общия случай се наблюдават всички разрезни усилия (нормални, тангенциални, огъващи моменти). Когато дебелината е малка (под $1/20$ от радиуса на кривина), черупките се наричат *тънкостенни* (фиг.2) и при тях огъващият момент може да бъде пренебрегнат при определяне на напреженията и деформациите. **По-нататък в изложението ще бъдат разгледани съдове, изградени от тънкостенни осовосиметрични черупки.** При тези съдове се приема, че съществуват само нормални разрезни усилия, а нормалните напрежения са равномерно разпределени по дебелината на стената.

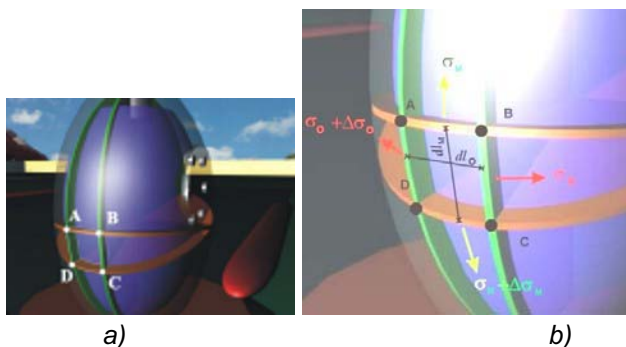


Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг.3 направлението на главните кривини са означени като *окръжно*, с радиус на кривина ρ_0 и централен ъгъл θ_0 и *меридианно*, с радиус на кривина ρ_M и централен ъгъл θ_M .



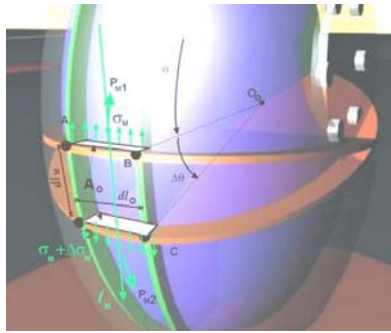
Фиг.4

Главните напрежения могат да бъдат определени от равновесието на безкрайно малък елемент от стената на съда (фиг.4 a и b), отделен с две меридианни и две окръжни сечения.

□ Определяне на напреженията

На фиг. 2 е показан разрез на тънкостенен осовосиметричен съд, подложен на действието на налягане, равномерно разпределено по вътрешната стена. Дебелината на стената на съда е постоянна и е означена с δ . В такъв случай на натоварване и геометрия се приемат следните опростяващи предпоставки:

- няма огъващи моменти, поради което нормалните напрежения са равномерно разпределени по дебелината на стената на съда;
- нормалните напрежения в площадките, успоредни на образуващите повърхнини бързо затихват от вътрешната стена към външната и могат да бъдат пренебрегнати, поради което напрегнатото състояние се приема за двумерно;
- главните площадки са по линиите на главните кривини (по сеченията с най-голям и най-малък радиус на кривина).



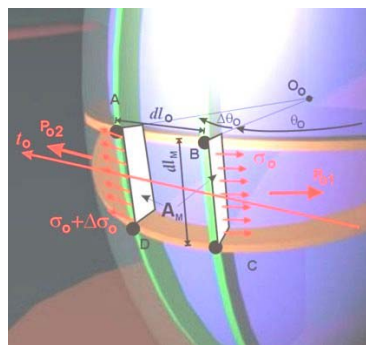
Фиг. 5

Страните на елемента са ориентирани по равнините на главните кривини. Страните AB и CD с дължина dl_0 , в които действат нормалните напрежения σ_M , са перпендикулярни на меридианното направление (фиг.5).

Предполага се, че нарастването на централния ъгъл $\Delta\theta_M$ между двете сечения води до нарастване на напрежението $\Delta\sigma_M$. Площта на сечението е $A_0 = \delta dl_0$. Нормалните усилия в двете сечения са :

$$P_{M1} = A_0 \sigma_M = \sigma_M \delta dl_0, \text{ за сечение } AB, \text{ и} \quad (1)$$

$$P_{M2} = A_0(\sigma_M + \Delta\sigma_M) = (\sigma_M + \Delta\sigma_M) \delta dl_0, \text{ за сечение } CD. \quad (2)$$

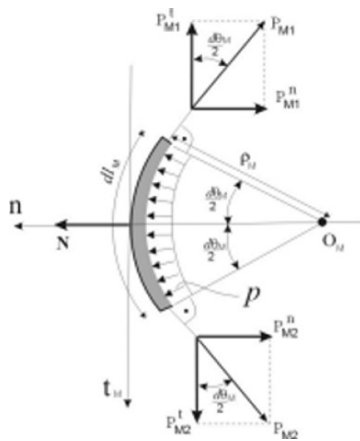


Фиг. 6

Страни BC и AD с дължина dl_M , в които действат нормалните напрежения σ_0 са перпендикулярни на окръжностното направление (фиг.6). Предполага се, че нарастването на централния ъгъл $\Delta\theta_0$ между двете сечения води до нарастване на напрежението $\Delta\sigma_0$. Площта на сечението е $A_M = \delta dl_M$. Нормалните усилия в двете сечения са :

$$P_{O1} = A_M \sigma_0 = \sigma_0 \delta dl_M, \text{ за сечение } BC, \text{ и} \quad (3)$$

$$P_{O2} = A_M(\sigma_0 + \Delta\sigma_0) = (\sigma_0 + \Delta\sigma_0) \delta dl_M, \text{ за сечение } AD. \quad (4)$$



Фиг. 7

Нека при тези условия да напишем уравненията за равновесие на елемента:

- Сумата от проекциите на силите върху меридианното направление t_M е равна на нула (фиг.7) –

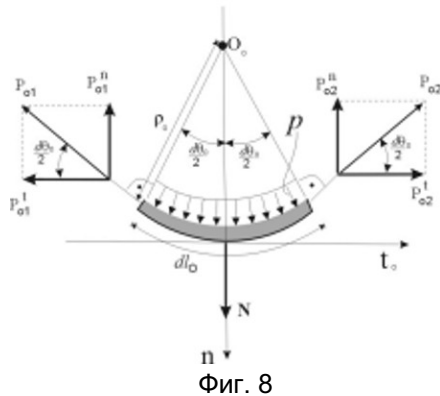
$$\sum P_{tM} = 0,$$

$$P'_{M2} - P'_{M1} = 0,$$

$$(\sigma_M + \Delta\sigma_M) \delta dl_0 \cos \frac{d\theta_M}{2} = \sigma_M \delta dl_0 \cos \frac{d\theta_M}{2},$$

откъдето

$$\Delta\sigma_M = 0 \text{ и } P_{M2} = P_{M1} = \sigma_M \delta dl_0 \quad (5)$$



- Сумата от проекциите на силите върху окръжностното направление t_o е равна на нула (фиг.8) –

$$\begin{aligned} \sum P_{to} &= 0, \\ P'_{O2} - P'_{O1} &= 0, \\ (\sigma_o + \Delta\sigma_o) \delta dl_M \cos \frac{d\theta_o}{2} &= \sigma_o \delta dl_M \cos \frac{d\theta_o}{2}, \end{aligned}$$

откъдето

$$\Delta\sigma_o = 0 \text{ и } P_{O2} = P_{O1} = \sigma_o \delta dl_M. \quad (6)$$

- Сумата от проекциите на силите върху нормалата е равна на нула (фиг.7 и фиг.8) -

$$\begin{aligned} \sum P_n &= 0, \\ N - P_{O1}^n - P_{O2}^n - P_{M1}^n - P_{M2}^n &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Силите, участващи в уравнението, са:

$N = p dl_o dl_M$ - сила, формирана от налягане с големина p , действащо върху елемента с площ $dl_o dl_M$;

$P_{O2}^n = P_{O1}^n = P_{O1} \sin \frac{d\theta_o}{2} = \sigma_o \delta dl_M \sin \frac{d\theta_o}{2}$ - проекциите на силите по окръжностно направление върху нормалата към елемента;

$P_{M2}^n = P_{M1}^n = P_{M1} \sin \frac{d\theta_M}{2} = \sigma_M \delta dl_o \sin \frac{d\theta_M}{2}$ - проекциите на силите по меридианно направление върху нормалата към елемента.

След като заместим тези стойности на силите в уравнението за равновесие (7), получаваме:

$$p dl_M dl_o - 2\sigma_o \delta dl_M \sin \frac{d\theta_o}{2} - 2\sigma_M \delta dl_o \sin \frac{d\theta_M}{2} = 0. \quad (8)$$

Като се вземе предвид, че $dl_M = \rho_M d\theta_M$, $dl_o = \rho_o d\theta_o$, $\sin \frac{d\theta_M}{2} \approx \frac{d\theta_M}{2}$ и $\sin \frac{d\theta_o}{2} \approx \frac{d\theta_o}{2}$, уравнение (8) добива следния вид:

$$p \rho_M d\theta_M \rho_o d\theta_o - 2\sigma_o \delta \rho_M d\theta_M \frac{d\theta_o}{2} - 2\sigma_M \delta \rho_o d\theta_o \frac{d\theta_M}{2} = 0.$$

В това уравнение може да се съкратят общите множители:

$$p \rho_M \rho_O d\theta_M d\theta_O - \sigma_O \delta \rho_M d\theta_M d\theta_O - \sigma_M \delta \rho_O d\theta_O d\theta_M = 0 ,$$

$$p - \sigma_O \frac{\delta \rho_M d\theta_M d\theta_O}{\rho_M \rho_O d\theta_M d\theta_O} - \sigma_M \frac{\delta \rho_O d\theta_O d\theta_M}{\rho_M \rho_O d\theta_M d\theta_O} = 0$$

и да се получи аналитичен израз за връзката между напреженията, налягането и геометричните размери на тънкостенния съд:

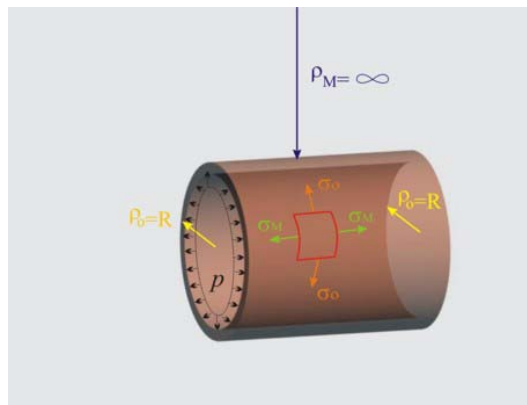
$$\sigma_O \frac{\delta}{\rho_O} + \sigma_M \frac{\delta}{\rho_M} = p \quad (9)$$

Ако изводът на тази формула ви се вижда сложен, поставете се поне да разберете и запомнете следните

□ Частни случаи

- Тънкостенен цилиндричен съд без дъно (тръба)

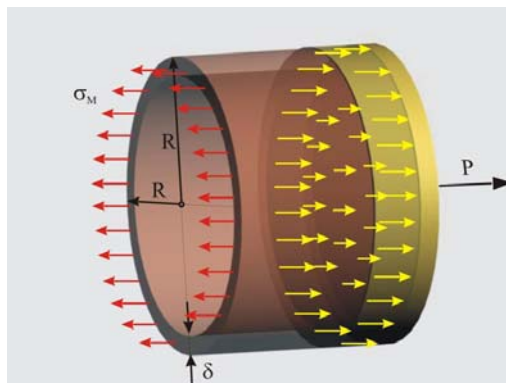
При цилиндричните съдове меридианното направление е права линия, така че радиусът на кривина е безкрайност- $\sigma_M = \infty$ (фиг. 9). Окръжностното направление е с постоянна кривина, така че $\rho_O = R$.



Фиг. 9

Като заместим тези стойности в уравнението за равновесие (9), за напреженията се получава:

$$\sigma_M = 0, \quad \sigma_O = \frac{pR}{\delta} \quad (10)$$



Фиг. 10

- Тънкостенен цилиндричен съд с дъно

При тези съдове налягането върху дъното формира натиск $P = p \pi R^2$ (фиг. 10). Този натиск се уравнива от вътрешното усилие $N = \sigma_M 2\pi R \delta$. Като приравним двете сили, се получава

$$\sigma_M 2\pi R \delta = p \pi R^2 \quad \text{и} \quad \sigma_M = \frac{pR}{2\delta}$$

откъдето окончателният израз за големината на меридианното напрежение добива вида

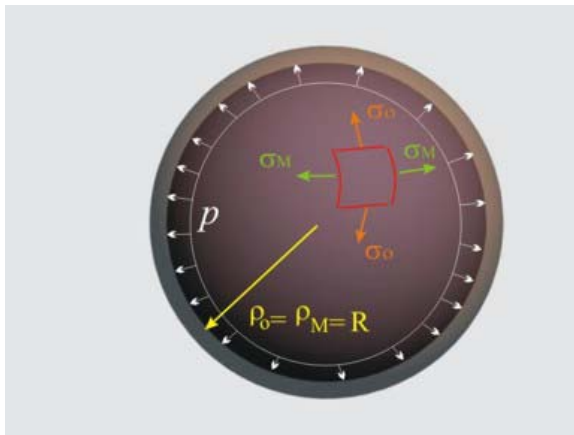
$$\sigma_M = \frac{pR}{2\delta} . \quad (11)$$

От уравнения (10) и (11) се вижда, че напреженията в окръжностно направление са два пъти по-големи от тези в меридианно. Поради това при достигане на критичното вътрешно налягане разрушаването на такъв цилиндричен съд с дъно се очаква да стане от пукнатина, успоредна на образуващата на цилиндъра, предизвикана от окръжностното напрежение. Поради това, при оразмеряването на съда дебелината му се съобразява преди всичко с формулата за σ_O .

$$\sigma_O = \frac{pR}{\delta} \rightarrow \delta = \frac{pR}{\sigma_{\text{дон}}} .$$

В някои случаи, за по-ефективно използване на материала, от който е изработен съда, окръжностното направление се усилва с пръстени. Това позволява при оразмеряването на съда, дебелината му да се съобразява преди всичко с формулата за σ_M и така се получава два пъти по-малка

$$\sigma_M = \frac{pR}{2\delta} \rightarrow \delta = \frac{pR}{2\sigma_{\text{дон}}} .$$



Фиг. 11

• Тънкостенен сферичен съд
При сферичните съдове кривините в меридианното и окръжностното направление са равни и $\rho_M = \rho_O = R$ (фиг.11). От уравнението за равновесие (9)

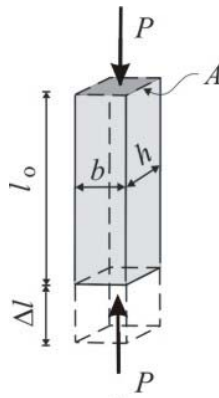
$$\sigma_O \frac{\delta}{\rho_O} + \sigma_M \frac{\delta}{\rho_M} = p$$

за главните напрежения се получава

$$\sigma_O = \sigma_M = \frac{pR}{2\delta} .$$

Вижда се, че напреженията в стените на сферичния съд при еднакви радиуси на кривина се получават два пъти по-малки от тези в стените на цилиндричните съдове (по окръжностно направление). Все пак, в практиката по-често се използват цилиндрични съдове със сферични дъна, тъй като технологично са по-лесни за изработване.

25. УСТОЙЧИВОСТ НА НАТИСНАТИ ПРЪТИ ДО И СЛЕД ГРАНИЦАТА НА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ



Фиг.1

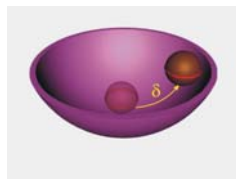
В предишна тема беше изведена формулата $\sigma = \frac{P}{A_0}$, по която се определят напреженията в прът,

подложен на чист натиск (фиг.1). В средата на XIX век с широкото навлизане на желязото като конструктивен материал напречното сечение на гредите, изчислено по тази формула, става твърде малко. Получават се "стройни" елементи с много голяма разлика между дължината l и размерите на напречното сечение b и h . Зпочват да се случват инциденти с на пръв поглед правилно оразмерени изделия. Това предизвиква интереса на инженерите-конструктори и учените към въпросите, свързани с

устойчивостта на еластичните системи, разработвани до този момент предимно теоретично. Още през средата на XVIII век Ойлер извежда аналитична формула за определяне големината на критичната натискова сила, при която гредата губи устойчивост и се "изкълчва". Тя и до днес се прилага в инженерните изчисления. Тази тема е посветена предимно на нейното получаване и прилагане.

Преди да преминем към анализа на процеса, при който една натисната греда губи устойчивост и се "изкълчва", нека да се помъчим да изясним понятието *устойчивост*, видовете равновесие и как се проявяват те при натиснатите греди.

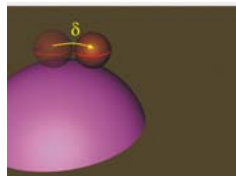
Един от начините да бъде онагледено устойчиво равновесие е състоянието на топче, поставено в паничка.



Фиг.2

Едно тяло се намира в **устойчиво равновесие**, ако при малко отклонение то се стреми да се върне към равновесното си състояние и се връща към него след премахване на отклоняващото въздействие (фиг.2).

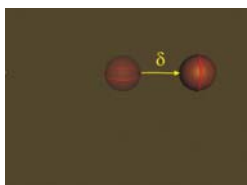
Един от начините да бъде онагледено неустойчиво равновесие е състоянието на топче, закрепено върху дъното на захлупена паничка.



Фиг.3

Едно тяло се намира в **неустойчиво равновесие**, ако при малко отклонение то се стреми да продължи да се движи в посока на отклонението и след премахване на отклоняващото въздействие не се връща в изходното равновесно положение (Фиг.3).

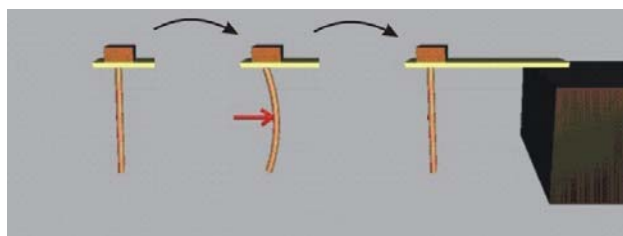
Един от начините да бъде онагледено безразлично равновесие е състоянието на топче, поставено върху корава равнина.



Фиг.4

Едно тяло се намира в безразлично равновесие, ако при малко отклонение то придобива нова форма на устойчиво равновесие (фиг.4) и за да се върне към изходното положение, към него трябва да бъде приложено отклоняващо въздействие с обратна посока.

Нека сега да проследим, как тези три състояния се реализират при греда, изправена вертикално (така собственото тегло не влияе върху огъването) и натисната със сила P . В примера, който се разглежда по-нататък, тази сила се формира от силата на теглото на едно тяло, поставено върху гредата, и може да бъде увеличавана посредством добавяне на нови тела.

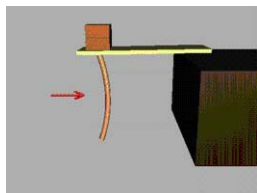


Фиг. 5

При устойчиво равновесие една смущаваща напречна сила изважда пръта от равновесното му положение, но при премахване на силата прътът възвръща равновесната си форма (фиг.5).

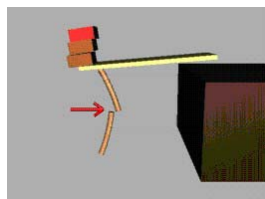
Устойчивото равновесие се запазва при увеличаване на натисковата сила в определени граници .

При увеличаване на натисковата сила прътът изпада в безразлично равновесие.



Фиг. 6

При безразличното равновесие една смущаваща напречна сила изважда пръта от равновесното му положение и при премахване на силата прътът запазва новата си криволинейна форма (фиг.6). За да възвърне първоначалната си равновесна форма, върху него трябва да се приложи сила с обратна посока.



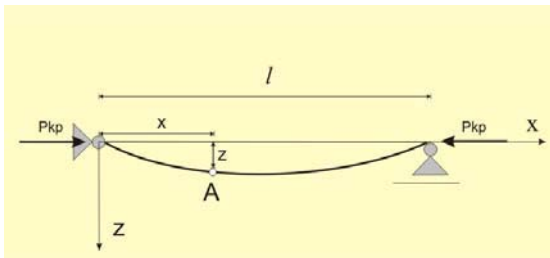
Фиг. 7

При увеличаване на натисковата сила над определена граница, която тук ще се нарича "критична сила $P_{кр}$ ", равновесието става неустойчиво.

При неустойчиво равновесие една смущаваща напречна сила изважда пръта от равновесното му положение, като деформациите нарастват до разрушаване (фиг.7).

Критичната сила играе важна роля при оразмеряване и оценка на носимоспособността на натиснатите пръти. Очевидно, за да изпълняват предназначението си, те трябва да бъдат натоварени със сила, по-малка от критичната. Ако анализираме вече изработена греда с известни размери, въпросът, на който трябва да бъде даден отговор, е *колко е критичната сила*. Ако проектираме греда, която трябва да понесе известна натискава сила, въпросът, на който трябва да бъде даден отговор е *какви да бъдат размерите на напречното сечение*. И в двата случая, за да отговорим на въпроса, трябва да имаме средство за анализ, с други думи, с формула, по която да изчислим интересуващите ни величини. Тук ще бъде предложен един прост (и поради това донякъде приблизителен) начин за извеждане на такава формула.

Нека да разгледаме натиснат прът, при който натискът е достигнал критичната си стойност и прътът леко се е огънал (фиг.8). Както



знаем, за описание на огънатата ос на гредата съществува приблизителна диференциална зависимост, известна като *диференциално уравнение на еластичната линия*:

Фиг.8

$$EI_{\min} z'' = -M_{ог}$$

Това уравнение важи и за разглеждания прът. От друга страна, както се вижда от фиг.8, за дадена точка от оста на пръта (например т.А), огъващият момент е равен на

$$M_{ог} = P_{kp} z.$$

От двете уравнения се получава

$$EI_{\min} z'' = -P_{kp} z \text{ или } yz + \frac{P_{kp}}{EI_{\min}} z = 0.$$

Като означим $\frac{P_{kp}}{EI_{\min}} = \kappa^2$, получаваме линейното хомогенно

диференциално уравнение от втори ред

$$yz + \kappa^2 z = 0,$$

чието общо решение е $z = A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x)$.

За определяне на интеграционните константи A и B са необходими две гранични условия. Като такива могат да послужат условията в двата края на пръта.

1. За левия край.

Това е началото на координатната система, следователно тук $x=0$ и $z=0$. Като заместим тези условия в общото решение, получаваме

$$0 = A \cos(k0) + B \sin(k0) = A + 0, \text{ или } A=0.$$

Така след прилагане на първото гранично условие за общото решение остава

$$z = B \sin(kx).$$

2. За десния край.

Тук координатата x е равна на дължината на пръта, или $x=l$ и $z=0$, така че решението в тази точка се получава

$$B \sin(kl) = 0.$$

Това равенство се удовлетворява в следните два случая:

1-ви случай - $B=0$. Тъй като вече получихме $A=0$, този случай води до равенството $z=0$, или еластичната линия съвпада с права линия - първоначалната ос на пръта. Това обаче противоречи на приетото в началото - че прътът се е огънал и оста му е крива линия. Затова този случай не представлява интерес за изследването.

2-ри случай - $\sin(kl) = 0$. Това условие се изпълнява, когато kl приема стойностите $kl=0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$, където n е цяло число. За общия случай $kl=n\pi$, откъдето $k = \frac{n\pi}{l}$.

Да си спомним, че по полагане $\frac{P_{kp}}{EI_{min}} = \kappa^2$. Като обединим този израз с

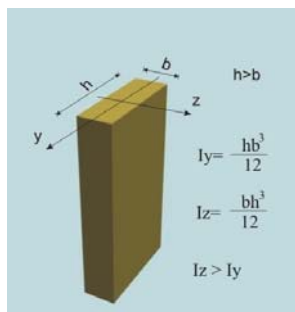
резултата от горния ред, получаваме

$$\frac{P_{kp}}{EI_{min}} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ и } P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} n^2.$$

По това уравнение, като заместяваме различни стойности на n , ще получаваме различни стойности на критичната сила. От практическа гледна точка интерес представлява най-малката от тези стойности, която все пак да не е нула. Тази стойност се получава при $n=1$ и е

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}.$$

Така се получава формулата на Ойлер, за която вече стана дума. При нейното прилагане трябва да се съблюдават следните три важни особености, пренебрегването на които може да доведе до катастрофално грешни резултати:



Фиг.9

□ *Формулата се прилага с минималния инерционен радиус*

Това правило произхожда от необходимостта да бъде получена най-малката стойност на критичната сила. Например, ако прътът има правоъгълно напречно сечение, така че главните инерционни моменти не са равни, то огъването

при загуба на устойчивост ще стане в равнината на по-малката коравина, или гредата ще се завърти около тази ос, спрямо която напречното сечение има най-малък инерционен момент (фиг.9). Едно подръчно средство, с което може да се демонстрира тази особеност, е чертожната линейка, който лесно се огъва в една равнина и е почти невъзможно да бъде огъната в друга равнина, перпендикулярна на първата.

□ *Критичната сила се влияе от начина на закрепване*

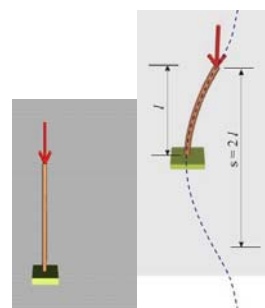
Схемата от фиг.8, която беше използвана при извода на формулата на Ойлер, е прът, ставно подпрян в двата си края. Има голямо разнообразие на начините на закрепване на прътите в една конструкция. Влиянието на тези начини се взема предвид във формулата посредством промяна на дължината l с коефициента β в една обобщена формула

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\beta l)^2}$$

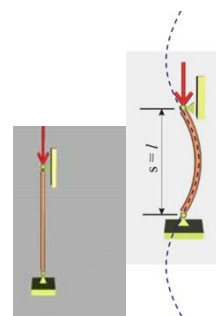
Изразът $s=(\beta l)$ се нарича *приведена дължина* и е равна на една полу дължина от деформираната ос на пръта.

Тук ще бъдат разгледани четири основни случая на закрепване:

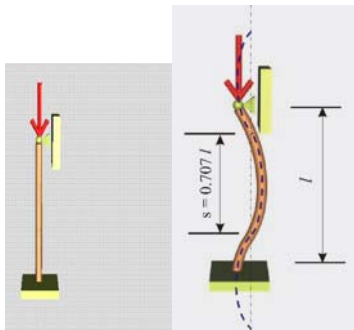
1. Запъване в единия край и свободен втори край - $\beta = 2$ (фиг.10).
2. Ставно подпирание в двата края - $\beta = 1$ (фиг.11).
3. Ставно подпирание в единия край и запъване в другия - $\beta=0.7$ (фиг.12).
4. Запъване в двата края - $\beta=0.5$ (фиг.13).



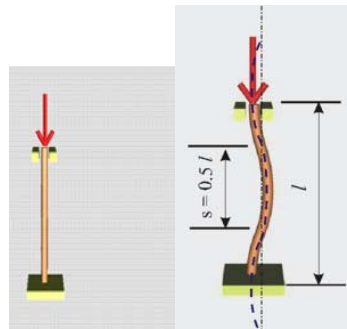
Фиг.10



Фиг.11

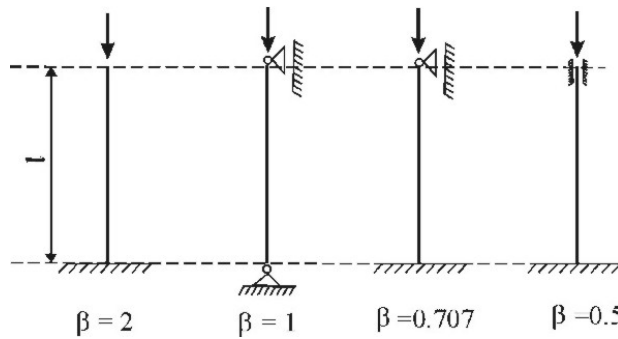


Фиг.12



Фиг.13

Едно обобщение на четирите случая е представено на фиг.14



Фиг. 14

□ Формулата на Ойлер важи само за елементи, чиито материал работи в участъка под границата на еластичност.

Тази особеност произхожда от факта, че изводът на диференциалното уравнение на еластичната линия, което беше използвано, е направен при предпоставка за валидност на закона на Хук. За да се определи в коя част на деформационната диаграма попада конкретно решение (под границата на еластичност или над нея), се въвежда характеристиката *стройност на пръта* - $\lambda = \frac{\beta l}{i_{min}}$, където i_{min} е минималният инерционен радиус $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$ (F - площ на напречното сечение).

За определяне на условията за устойчивост над границата на еластичност има различни методи, залегнали в нормативните документи (стандарты). Ако добре усвоите изложената дотук теория, важаща за еластичната област, със сигурност ще се справите, ако това се наложи в конкретен случай, с литературата, засягаща проблема извън тази област.

26. КИНЕМАТИКА НА ТОЧКА.

ЗАКОН НА ДВИЖЕНИЕТО. ТРАЕКТОРИЯ. СКОРОСТ

С тази тема започва нов раздел от дисциплината "Техническа механика" - "Кинематика", в който ще анализираме кинематичното състояние на обектите. Анализа ще започнем с разглеждане на най-простия обект - материална частица (материална точка), но преди това ще бъдат въведени някои понятия, необходими за разбиране на по-нататъшното изложение.

- Кинематиката е дял от механиката, в който се изучава движението на телата, без да се отчитат причините, породили това движение (както ще видим по-нататък, това обикновено са някакви сили).

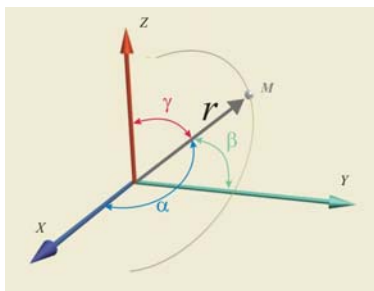
- Обект на механиката е механичното движение - изменението на взаимното положение на телата, извършващо се в пространството и времето. При това едно от телата се избира за неподвижно и към него се свързва координатна система. Ако използвате електронния вариант на лекциите, за вас това ще бъде екранът на монитора. При книжния вариант това ще бъде печатният лист. Така по-нататъшното описание на движението става спрямо тази координатна система.

- Досега и друг път се е налагало да използвам движението на телата при описание на някои обекти - работа на опорните устройства, получаване на ротационна повърхнина, момент на сила спрямо точка, двоица сили и др. В тези случаи обаче, времето, за които се извършва движението, не беше от значение. В кинематиката се работи с понятия като скорост и ускорение, така че времето е от първостепенно значение. Използва се астрономическото време, което се изменя от миналото към бъдещето и се измерва в секунди, а в математичните изрази се въвежда като скаларна, непрекъснато изменяща се независима величина.

- Основно при анализа ще бъде използвана правоъгълна координатна система. Освен нея ще бъдат използвани и други начини за определяне положението на точката - векторен, при който се получават най-общите, универсални уравнения за описание на движението, и естествен, удобен в някои частни случаи на движение. За всяка от координатните системи характеристиките на движението ще бъдат разгледани поотделно. Не е необходимо да се притеснявате, ако не сте запознати с особеностите на тези системи, тъй като всичко необходимо за настоящия анализ ще бъде дадено тук.

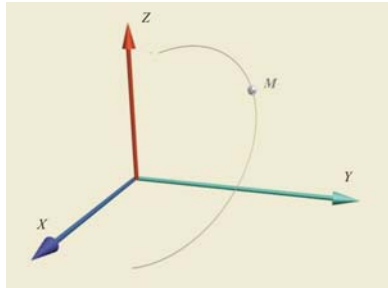
□ Векторен метод

При векторния метод положението на точката М се определя от вектор r с начало в неподвижната т.О и край в т.М (радиус-вектор, фиг.1). Така, за да познаваме положението на една точка М, ако тя е неподвижна, е необходимо да знаем четири числа (координати) - дължината на радиус-вектора и трите ъгъла α, β, γ , които той



Фиг. 1

склучва с координатните оси. Обикновено, за да се избегне влиянието на мерките за ъглите (радиани, градуси, гради) вместо ъглите се дават техните косинуси (посочни косинуси на вектора). Само два от трите посочни косинуса са независими (ако знаем два от тях, можем да изчислим третия), така че положението на т.М се определя с три координати.

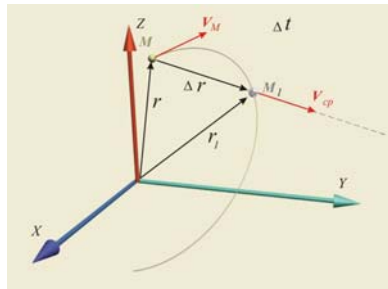


Фиг.2

Очевидно, ако т.М се движи, координатите ѝ се изменят с течение на времето, т.е. радиус-векторът става функция на времето (t). За да познаваме движението на точката, трябва да знаем нейното положение (трите координати) във всеки момент от времето. Това положение се дава от три уравнения, свързващи координатите на точката с времето, които могат да се обобщят като $r=r(t)$. Тези уравнения представляват закона на движението на точката.

Когато по някакъв повод стане дума за закон на движението в механиката, не е необходимо да се мъчите да си спомните някаква текстова формулировка. Необходимо е да си спомните уравненията.

При движението си материалната точка съвпада с различни геометрични точки. Съвкупността от геометричните точки в пространството, с които съвпада в различните моменти от движението си т.М, се нарича траектория на т.М. Траекторията е непрекъснатата линия, описана от точката при движението ѝ спрямо координатната система (фиг.2).



Фиг.3

Нека да разгледаме движението на точката между два момента (фиг.3):

- Момент t , в който точката се намира в положение М, определено от радиус-вектор r .
- Момент t_1 , близък до първия, в който точката се намира в положение M_1 , определено от радиус-вектор r_1 .

Интервалът между двата момента е

$$\Delta t = t_1 - t.$$

Преместването на точката се определя от разликата между двете положения. Това е векторът Δr , изчислен като $\Delta r = r_1 - r$.

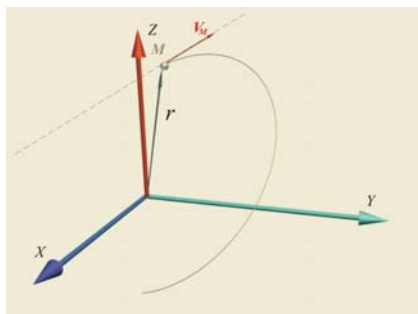
Очевидно, така дефинирано, преместването се различава от изминатия път по траекторията.

Отношението на вектора-преместване и интервала от време, за който е станало преместването, се нарича *средна скорост на т.М* :

$$V_{cp} = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

От това равенство следва, че средната скорост е вектор, чиито направление и посока съвпадат с тези на вектора Δr . Преместването се мери в метри $[m]$, времето - в секунди $[s]$, така че мярката на средната скорост е $V_{cp} \left[\frac{m}{s} \right]$.

От фиг.3 се вижда, че колкото по малък е интервалът Δt , толкова по-



Фиг. 4

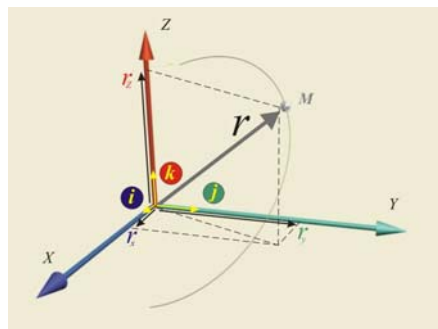
малка ще бъде разликата между преместването (Δr) и изминатия път (разстоянието между т.М и т.М₁, мерено по кривата линия на траекторията). Като се намалява интервалът до безкрайност ($\Delta t \rightarrow 0$), се осъществява граничен преход, при който преместването клони към нула ($\Delta r \rightarrow 0$). При този преход границата на V_{cp} е крайна величина, която се нарича *скорост на точката в момента t* V_M (фиг.4):

$$V_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = \frac{dr}{dt}.$$

Това уравнение дефинира скоростта на точката като първата производна на радиус-вектора по отношение на времето.

При прехода директрисата на Δr от секуща клони към допирателна към траекторията в т.М. Така може да се обобщи, че скоростта на точката има направление на тангента към траекторията и посока, съвпадаща с посоката на движението.

□ Правоъгълна координатна система



Фиг. 5

Правоъгълната координатна система се състои от три взаимно-перпендикулярни оси с общо начало, които задават основните направления и положителните посоки в пространството. Както в ежедневието разполагаме с еталон за дължина (метър), с който непрекъснато сравняваме размерите на интересуващите ни обекти, така и по координатните оси има въведени еталони за дължина, наречени *единични вектори*, които тук са означени i за оста

X, j за Y и k за Z (фиг. 5), с които непрекъснато се сравняват размерите на векторите. Например от фигурата се вижда, че дължината на проекцията на радиус-вектора r върху оста Z има по-голяма дължина от единичния вектор k . Числото, което показва колко пъти векторът r_z е по-дълъг от k , ще бъде означено със Z_r . Така за вектора r_z може да се запише

$$r_z = Z_r k .$$

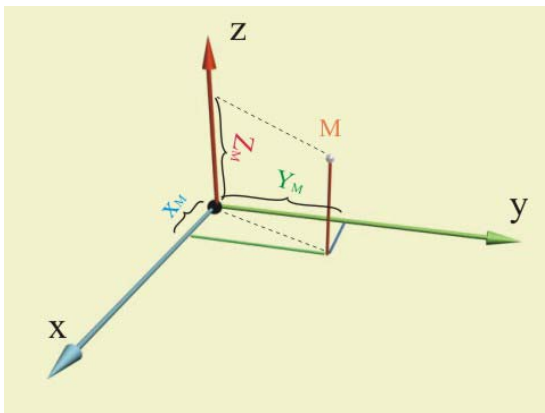
Същото важи и за другите две проекции на вектора :

$$r_x = X_r i,$$

$$r_y = Y_r j,$$

където числото X_r показва колко пъти векторът r_x е по-дълъг от i , а числото Y_r - колко пъти векторът r_y е по-дълъг от j ,

Да познаваме положението на една точка M спрямо една дадена правоъгълна координатна система означава да знаем три числа X_M, Y_M, Z_M , които дават дължините на проекциите на радиус-вектора върху трите координатни оси (фиг.6). По



Фиг.6

време на движението дължините на тези проекции се променят - стават функции на времето (t). Така законът за движението се изразява от трите уравнения

$$X_M = x(t) ,$$

$$Y_M = y(t) ,$$

$$Z_M = z(t) .$$

Ако точката се движи така, че остава винаги в една равнина (например xOy), законът за движение се дава от две уравнения (за примера - $X_M = x(t)$ и $Y_M = y(t)$).

Ако точката се движи по права линия, то може да ориентираме оста X успоредно на направлението на тази права, и законът за движение се дава от уравнението $X_M = x(t)$.

При известен закон за движение определянето на траекторията може да стане, като се задават отделни стойности на времето t и за всяка от тях се намират съответните стойности на координатите. Така за всеки от избраните моменти се получава геометрична точка - положението на материалната точка. Въз основа на получената съвкупност от геометрични точки може да се получи траекторията, като те бъдат свързани с плавна линия.

Уравненията от закона за движение $X_M = x(t)$, $Y_M = y(t)$ и $Z_M = z(t)$ могат да бъдат разглеждани като параметрични уравнения на траекторията с параметър времето t . Този параметър може да бъде елиминиран, така че да се получи пряка връзка между координатите на точката. Тази връзка задава една крива в координатната система, която е траекторията на движението.

В пространството кривата ще се задава от две уравнения с трите координати.

В равнината кривата ще се задава от едно уравнение с двете координати.

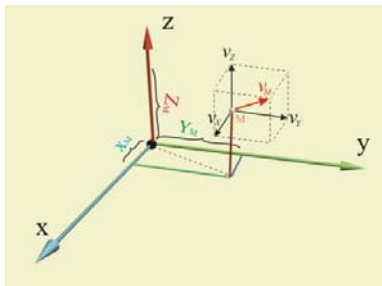
Какво става, когато движението се извършва по права линия, ще трябва да се досетите сами.

След като в координатната система са въведени единични вектори, радиус-векторът на точката може да бъде представен като

$$r_M = X_M i + Y_M j + Z_M k$$

и законът на движение да бъде трансформиран от координатна форма във векторна:

$$r_M(t) = x(t) i + y(t) j + z(t) k.$$



Фиг. 7

Като се вземе предвид, че единичните вектори са константи (постоянна дължина - единица, постоянно направление и посока - тези на съответните координатни оси), след диференциране се получава:

$$\frac{dr_M}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} i + \frac{dy(t)}{dt} j + \frac{dz(t)}{dt} k.$$

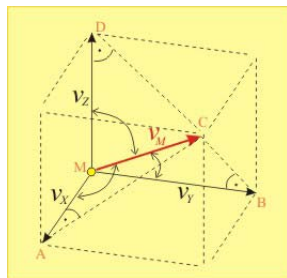
Вече е известно, че $\frac{dr_M}{dt}$ е скоростта на т.М. Нека с v_x , v_y и v_z да са означени проекциите на тази скорост върху трите координатни оси (фиг.7). Тогава векторът-скорост може да се представи като

$$v_M = v_x i + v_y j + v_z k.$$

Като съпоставим двете уравнения, за проекциите на скоростта получаваме:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, v_y = \frac{dy(t)}{dt} \text{ и } v_z = \frac{dz(t)}{dt},$$

или проекциите на скоростта върху координатните оси се получават като първи производни по отношение на времето на уравненията от закона за движението.



Фиг. 8

След като са известни проекциите, пълната скорост се изчислява по формулата (фиг.8)

$$v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Направлението на скоростта се определя с косинусите на ъглите, които сключва с всяка от координатните оси (посочни косинуси или още: косинус-директори). Например от правоъгълния триъгълник ΔMAC (фиг.8) може да се напише

$$\cos(v_M; v_x) = \frac{v_x}{v_M}.$$

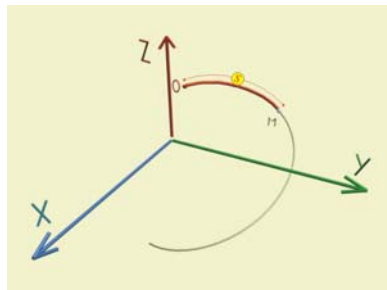
За другите два ъгъла изрази се извеждат от ΔMBC : $\cos(v_M; v_y) = \frac{v_y}{v_M}$,

и от ΔMCD

$$\cos(v_M; v_z) = \frac{v_z}{v_M}.$$

□ Естествена координатна система

Този начин за описание на движението е възможен, когато е известна траекторията. Тогава върху нея може да се фиксира една геометрична точка



Фиг. 9

и положението на движещата се материална точка да бъде определяно от едно число, което дава разстоянието (S) между двете точки (фиг.9). Величината S се нарича *криволинейна координата* или *криволинейна абсциса*. В този случай законът за движение се дава от уравнението

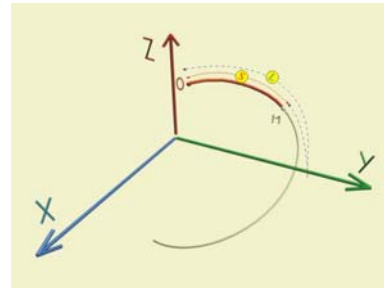
$$S = S(t).$$

Необходимо е да се прави разлика между криволинейната координата S , която фиксира конкретното положение на точката, и изминатия път L при движението на точката по траекторията (фиг.10).

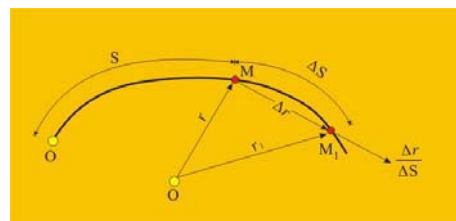
За опростяване на анализа по-нататък ще бъде разгледан един често срещан в техниката случай, при който траекторията лежи в една равнина (например равнината на листа, който четете, или на монитора, ако ползвате електронния вариант).

За извеждане на израз за определяне на скоростта отново се разглеждат две положения на точката - положение M в началото на интервала и положение M_1 в края на интервал от време Δt (фиг.11). От схемата на фигурата се вижда, че когато криволинейната координата S се изменя по големина, това довежда до изменение и на радиус-вектора r_M . Може да се каже, че r_M е функция на S . От друга страна, законът за движение определя S като функция на t . Така за радиус-вектора се получава следната сложна функция:

$$r_M = r(S) = r[S(t)].$$



Фиг. 10



Фиг. 11

Като се вземе предвид, че скоростта на точката е $V_M = \frac{dr}{dt}$ и правилата за диференциране на сложна функция, се получава:

$$V_M = \frac{dr[S(t)]}{dt} = \frac{dr}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}.$$

Първият множител $\frac{dr}{dS}$ е границата, към която клони отношението $\frac{\Delta r}{\Delta S}$

при прехода $\Delta S \rightarrow 0$:

$$\frac{dr}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta S} \right).$$

От чертежа се вижда, че това е вектор с дължина, по-малка от единица, тъй като Δr е по-малко от ΔS . Също така се вижда, че колкото $t.M_1$ е по-близо от $t.M$, толкова разликата между Δr и ΔS е по-малка. Следователно при прехода $\Delta S \rightarrow 0$, $\Delta r \rightarrow \Delta S$, и $\frac{dr}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta S} \right) = 1$.

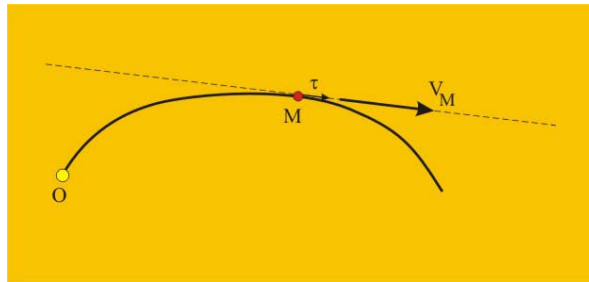
Този резултат показва, че $\frac{dr}{dS} = \tau$ е единичният вектор на тангентата, насочен по растящите стойности на S . Така изразът за скоростта става

$$V_M = \frac{dS}{dt} \tau.$$

Тъй като τ е единичен вектор на тангентата, за $\frac{dS}{dt}$ остава да бъде проекцията v_τ на скоростта върху тангентата. Така окончателно за скоростта се получава

$$v_\tau = \frac{dS}{dt} \text{ и } V_M = v_\tau \tau.$$

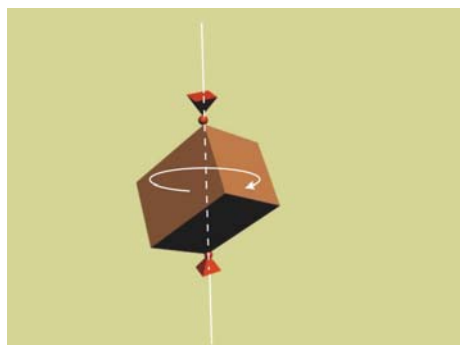
При решаване на задачите по-нататък в този курс и на семинарните упражнения по дисциплината често с V_M ще се отбелязва големината на скоростта, а за направлението ще се предполага за предварително известно, че е по тангентата към траекторията (фиг. 12).



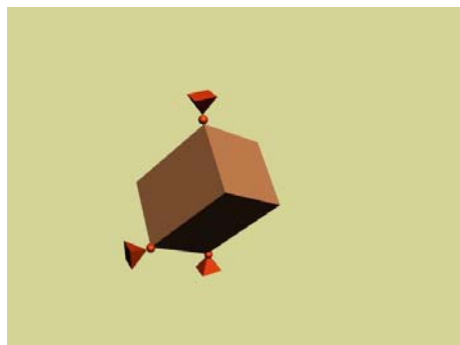
Фиг. 12



Фиг.1



Фиг. 2



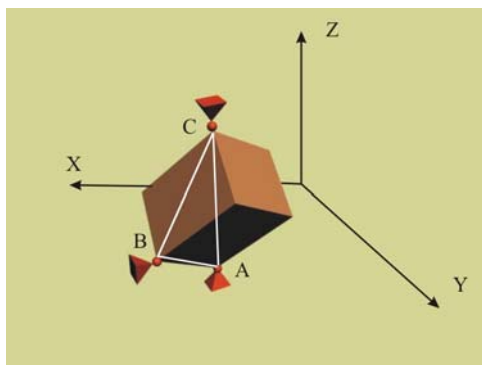
Фиг.3

С тази тема започва нов раздел от кинематиката – кинематика на тяло, в който се анализира движението на материалните тела. Да познаваме движението на едно тяло означава да познаваме движението на всяка негова точка. Това на пръв поглед е нерешима задача, тъй като дори и тела с минимални размери теоретично съдържат безброй материални точки. На практика е достатъчно да познаваме движението само на три точки от тялото, които не лежат на една права, за да определим движението на всяка друга точка от тялото. До такова заключение се стига при следния анализ:

Ако закрепим неподвижно една точка от тялото, то би могло да извършва движение само около тази точка (фиг.1).

Ако направим две от точките му неподвижни, единственото движение, което тялото би могло да извършва, е да се върти около правата, която ги свързва (фиг.2).

Ако закрепим и трета точка, движението на тялото вече ще стане невъзможно (фиг.3). Което означава и обратното - ако познаваме движението на тези три избрани точки, можем да определим и движението на цялото тяло.



Фиг. 4

В предишни теми видяхме, че положението на една точка в пространството се определя от три координати. За трите точки координатите стават девет. Съществуват обаче три допълнителни връзки между координатите на точките (фиг. 4)

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2},$$

$$BC = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2 + (Z_C - Z_B)^2} \text{ и } AC = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2 + (Z_C - Z_A)^2},$$

така че независимите координати са шест. Тези шест независими координати се наричат степени на свобода на движението. За да се опише движението на тялото, необходимо е да се разполага със шест уравнения, които да дават възможност тези координати да бъдат изчислявани във всеки момент от времето.

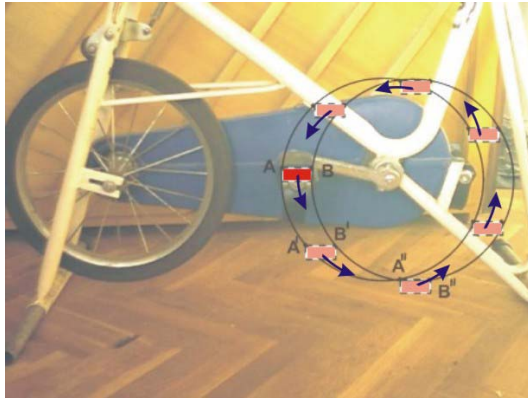
Анализът на общото движение е твърде сложен. В техниката обаче материалните обекти извършват движения, които най-често са подчинени на някакви допълнителни условия. Тези условия въвеждат допълнителни връзки и намаляват степените на свобода. По-нататък ще бъдат разгледани именно такива частни (специални) движения на телата, които се срещат най-често в техниката.

КИНЕМАТИКА НА ТРАНСЛАЦИОННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО

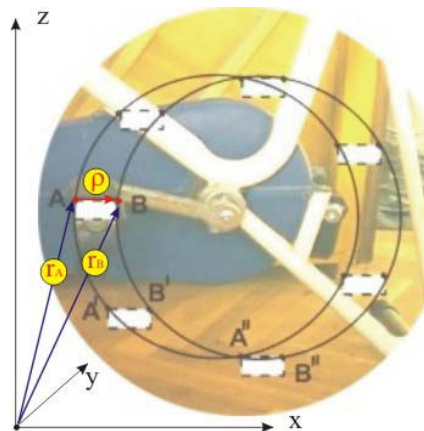
Едно тяло се движи транслационно, когато всяка права, свързана с тялото, остава успоредна сама на себе си по време на движението.

Например педалът на велосипеда от фиг.1 извършва транслационно движение, тъй като отсечките AB, A'B', A''B'' и т.н. са успоредни, а т.А и т.В се движат по еднакви траектории, успоредно отместени една спрямо друга.

При транслационното движение скоростите и ускоренията на всички точки от тялото са равни. Така движението е напълно определено, ако се познава движението само на една негова точка (например т.А).



Фиг.1



Фиг.2

Нека да означим радиус-вектор на т.А с r_A . Радиус-векторът на всяка друга точка от тялото (например т.В) може да се изрази с r_A и разстоянието ρ (Фиг.2):

$$r_B = r_A + \rho .$$

Тъй като тялото е идеално-твърдо (недеформируемо), разстоянията между точките остават постоянни по време на движението. Това означава, че векторът ρ е постоянен по големина и направление (за направлението - поради транслационното движение).

Или $\rho = const$ (не зависи от времето)

Така излиза, че ако познаваме закона $r_A=r(t)$ на движение на т.А, можем да определим закона $r_B = r(t) + \rho$ на движение и на т.В (или на всяка друга точка).

Нека да определим скоростта на т.В, като диференцираме закона за движение по времето:

$$V_B = \frac{dr_B}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} + \frac{d\rho}{dt} .$$

Тъй като $\frac{dr(t)}{dt} = V_A$ и $\frac{d\rho}{dt} = 0$, то окончателно се получава $V_B = V_A$.

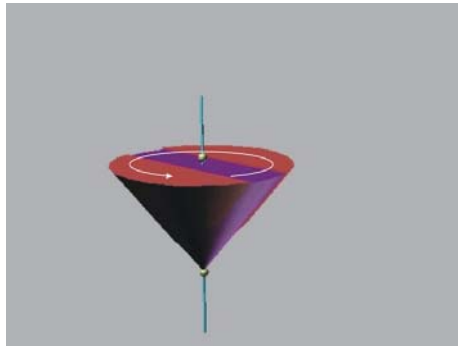
От равенството на скоростите следва и равенство на ускоренията:

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_A}{dt} = a_A .$$

При задачите за транслационно движение на тяло вместо да се разглежда движението на тялото се изучава само движението на една негова точка, или задачата се свежда до решаване на задача от кинематика на точка.

КИНЕМАТИКА НА РОТАЦИОННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО

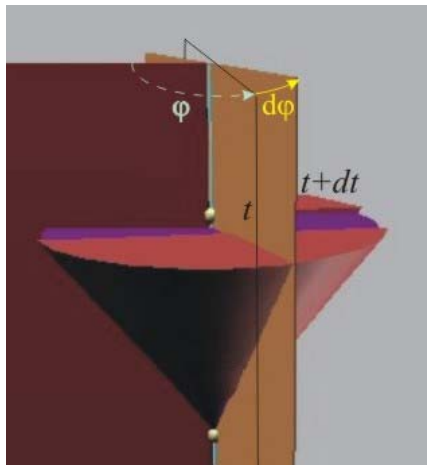
Едно тяло се движи ротационно, когато две точки от него остават неподвижни по време на движението. Двете точки определят една права,



Фиг.1

която се нарича ос на въртене (ротация, фиг.1). Такова движение извършват много елементи на машините и апаратите - химически бъркалки, трансмисионни валове, пластифициращи валяци и др.

Тъй като тялото по време на движението си остава в едно място от пространството, то за да се познава неговото движение, е достатъчно да се познава законът, по който то се върти около оста на ротация. За целта през нея се прекарват две равнини. Едната се приема за неподвижна (свързана например с екрана на монитора), а другата - за подвижна, свързана с въртящото се тяло (фиг.2). Нека да приемем, че в началото на движението двете равнини съвпадат, след което тялото започва да се върти. Подвижната равнина ще започне да се върти заедно с тялото, тъй като е свързана с него, и между двете равнини ще се образува ъгъл φ . Този ъгъл определя във всеки един момент положението на тялото. Ако знаем как се изменя този ъгъл във времето, можем да кажем, че познаваме движението на тялото. Или в този случай законът за движение е едно уравнение:



Фиг.2

$$\varphi = \varphi(t).$$

За положителна посока на въртене се приема посоката, обратна на часовниковата стрелка.

Нека в даден момент положението на тялото се определя от ъгъл φ , а след изтичане на време Δt този ъгъл е нараснал с $\Delta\varphi$ (тялото се е завъртяло малко в същата посока, фиг.2). Аналогично на понятието средна скорост на

преместване тук можем да дефинираме средна скорост ω_{cp} на изменение на ъгъла (средна ъглова скорост):

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Ъгловата скорост на тялото се определя като

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) = \frac{d\varphi}{dt},$$

т.е като първата производна на закона за движение спрямо времето.

Ако ъгълът се измерва в радиани, то мярката за бързината, с която се изменя ъгълът, би трябвало да бъде [rad/s]. Почти винаги обаче дименсията на ъгловата скорост ще срещнете без радиан като [s⁻¹].

Аналогично на ускорението при линейното движение, което показва бързината, с която се изменя скоростта, при ротационното движение се въвежда ъглово ускорение. Ако за даден интервал от време Δt ъгловата скорост се измени с $\Delta\omega$, бързината, с която се изменя ъгловата скорост, може да бъде характеризирана със средното ъглово ускорение $\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ [s²].

Под понятието ъглово ускорение се разбира

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right) = \frac{d\omega}{dt}.$$

Както при линейното движение, и тук според знака на ускорението може да се дефинира ускорително, закъснително и равномерно движение.

СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ НА ТОЧКИ ОТ ТЯЛО, ИЗВЪРШВАЩО РОТАЦИОННО ДВИЖЕНИЕ

Дефинираните в предишните теми величини ъгъл на завъртане (φ), ъглова скорост (ω) и ъглово ускорение (ε) характеризират движението на тялото като цяло. При решаването на редица задачи в областта на техниката се налага да бъдат определяни скоростите и ускоренията на точки от тялото. Един от начините те да бъдат определени е следният:

Да разгледаме тяло, което извършва ротационно движение и т.М от него, отстояща на разстояние R от оста на ротация (фиг.1). При въртенето на тялото около оста на ротация точката описва окръжност в равнина, перпендикулярна на тази ос.

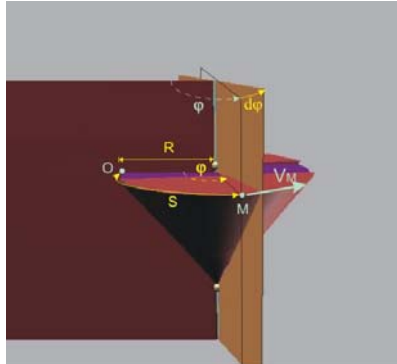
Това означава, че ние познаваме траекторията на точката и за описание на нейното движение можем да използваме естествен метод. За целта като отправна точка избираме т.О, лежаща върху неподвижната равнина. Положението на т.М се определя от криволинейната координата S , която може да бъде изчислена като дължина на дъга с централен ъгъл φ :

$$S = \widehat{OM} = R\varphi.$$

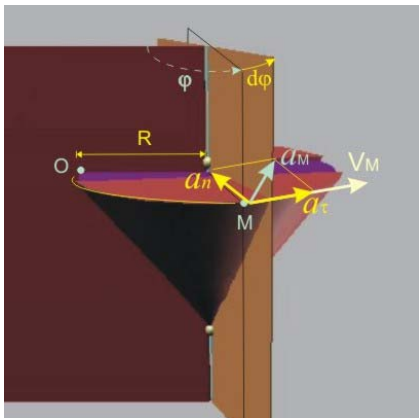
За скоростта V_M на точката може да се каже, че е насочена по допирателната към траекторията (в случая - окръжността) и че може да бъде определена по естествения метод като

$$V_M = \frac{dS}{dt} = \frac{dR}{dt} \cdot \varphi + R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0 + R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

т.е. големината на скоростта на една точка от ротационно движещо се тяло е равна на произведението от ъгловата скорост на тялото и разстоянието между точката и оста на въртене.



Фиг. 1



Фиг. 2

При естествения начин на задаване на движението, ускорението се определя с двете си компоненти a_τ и a_n (фиг.2).

Тангенциалната компонента a_τ съвпада по направление със скоростта V_M и се получава при нейното диференциране:

$$a_\tau = \frac{dV_M}{dt} = \frac{dR}{dt} \omega + R \frac{d\omega}{dt} = 0 + R\varepsilon.$$

Нормалното ускорение е насочено към центъра на въртене и се получава по формулата, известна от кинематика на точка:

$$a_n = \frac{V_M^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2.$$

Пълното ускорение можем да изчислим по правилото на паралелограма като хипотенуза в правоъгълен триъгълник:

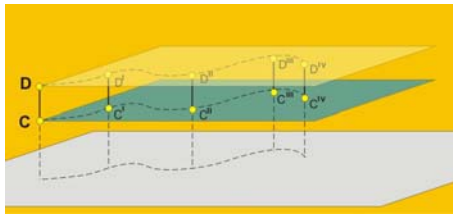
$$a_M = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (R\omega^2)^2} = \sqrt{R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}.$$

Или

$$a_M = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

29. КИНЕМАТИКА НА РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО. МОМЕНТЕН ЦЕНТЪР НА СКОРОСТТА. СКОРОСТ И УСКОРЕНИЕ НА ТОЧКА ОТ ТЯЛОТО

Едно тяло се движи равнинно, когато всички негови точки остават при движението си в равнини, успоредни на дадена неподвижна равнина.



Фиг.1

Например точките C (от основата) и D (от горната повърхност) на химическата бъркалка от фиг.1 се движат в различни равнини, намиращи се една над друга, но и двете равнини са успоредни на плота. По време на движението отсечката CD се движи транслационно, така че ако познаваме движението на т. C от основата, може да кажем, че познаваме движението на т. D и на останалите точки от корпуса, намиращи се върху отсечката. Следователно, ако познаваме движението на точките от основата, може да кажем, че познаваме движението на целия корпус.

Такива отсечки могат да бъдат въведени във всяко тяло, което извършва равнинно движение. Тогава вместо да се разглежда движението на цялото тяло, анализът на движението се съсредоточава върху едно сечение с равнина, успоредна на неподвижната равнина.

За анализиране на движението с неподвижната равнина (в нашия случай това е плътът) се свързва абсолютна (глобална) координатна система xOy , а с подвижното равнинно сечение - местна (локална) координатна система $\xi A\eta$ (фиг.2).

Равнинното движение може да се разглежда като съставено от две движения – транслационно и ротационно.



Фиг.2

Известно е, че транслационното движение е определено, ако се познава движението на една точка. Нека тази точка да бъде полюсът A с координати x_A и y_A . Тъй като по дефиниция в този случай точката се движи в една равнина, законът за движението ще се дава само от две уравнения: $x_A = f_1(t)$ и $y_A = f_2(t)$.

От друга страна, ротационното движение е определено от ъгъла на завъртане α .

Трите уравнения $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\alpha = f_3(t)$; (t - време), представляват закона на движение на тялото. Първите две характеризират транслационната компонента на движението, а третото – ротационната.

Скоростта на точка от тялото (например на т. M , фиг.3) се получава като сума от скоростта V_A на полюса (транслационна компонента) и скоростта V_M^A , с която точката се завърта около полюса (ротационна компонента).



Фиг.3

$$V_M = V_A + V_M^A.$$

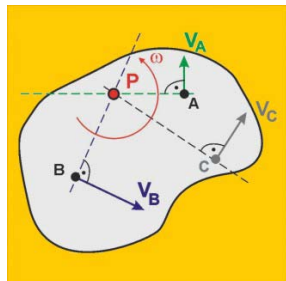
Скоростта на завъртане можем да определим както при ротационно движение:

$$V_M^A = \omega r,$$

така че окончателно се получава

$$V_M = V_A + \omega r.$$

Ако за полюс A бъде избрана точка, която в дадения момент е неподвижна ($V_A=0$), то скоростта на т. M се получава само като скоростта ωr на завъртане на точката около полюса – задачата се свежда до задача от ротационно движение. Тази точка от разглежданото сечение на тялото, чиято скорост в дадения момент е нула, се нарича моментен център на въртене (моментен център на скоростта). Този подход за определяне на скорости на точки от тялото е много разпространен в техническите анализи. За целта е необходимо да бъде определен моментният център на въртене. Тук ще разгледаме някои характерни случаи.



Фиг. 4

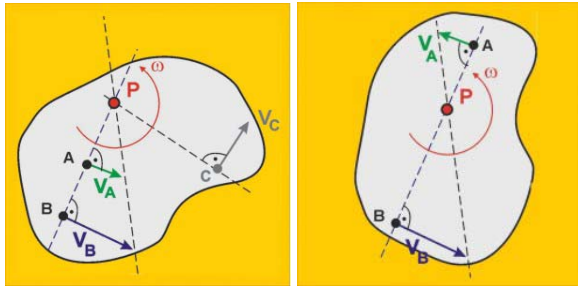
□ Първи случай

Известни са направлението на скоростите на две точки (т. A и т. B) от сечението, като тези направления не са успоредни помежду си (фиг.4).

Моментният център на скоростите (P) е пресечницата на перпендикулярите, издигнати от т. A и т. B към направлението на съответните скорости. Ъгловата скорост на тялото около т. P може да се определи от формулата за ротационно движение: $\omega = V_A/PA$ или

$$\omega = V_B/PB.$$

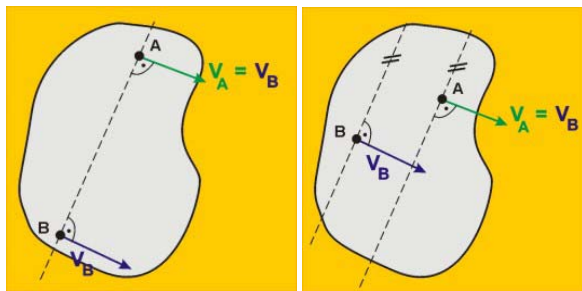
При известна ъглова скорост ω , скоростта на всяка друга точка C от тялото може да бъде намерена по формулата $V_C = \omega \times PC$.



Фиг. 5

Известно е общото направление на скоростите на две точки (A и B) от сечението, като това направление е перпендикулярно на отсечката AB . Така, ако се опитаме да работим по начина от първи случай, двата перпендикуляра ще се слоят и няма да могат да се пресекат. В този случай е необходимо да познаваме и големините на скоростите V_A и V_B

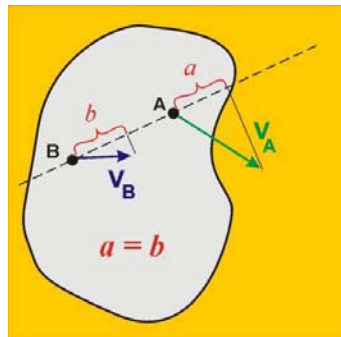
Моментният център на скоростта е пресечната точка на правата, определена от т. A и т. B с правата, определена от върховете на векторите скорост. Според посоката на скоростите т. P може да се получи между двете



Фиг. 6

□ Втори случай (фиг.5)

Ако във втория случай скоростите на точките A и B са с еднаква големина или ако скоростите са равни, еднопосочни и успоредни, но точките са разположени така, че перпендикулярите към скоростите не съвпадат, тогава моментният център на скоростта е в безкрайността и тялото извършва **транслационно движение**.



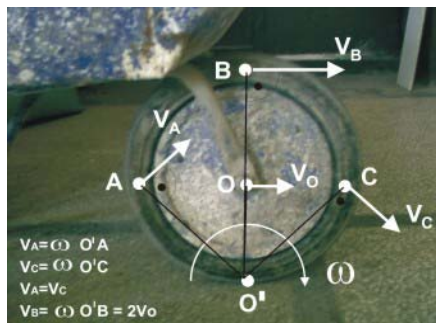
Фиг. 7

□ Теорема за проектираните скорости

Проекциите на скоростите на две точки A и B от разглежданото сечение върху оста, минаваща през точките, са равни (фиг.7).

□ Търкаляне без приплъзване

Един често срещан случай в задачите от кинематика на равнинно движение е търкалянето на корав диск върху равнина без приплъзване. Като пример ще разгледаме движението на колелото от строителна количка (фиг.8). Това колело извършва съвкупност от ротационно движение (върти се около оста си) и транслационно движение (оста се премества успоредно на равнината). Приема се, че то контактува с равнината, по която се търкаля (пода), в една точка - т.О'.



Фиг.8

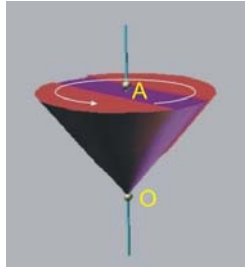
След като няма приплъзване, тази точка е обща за двата обекта. Като точка от равнината тя очевидно е неподвижна. Следователно ще бъде неподвижна и като точка от диска. Така тази точка може да се разглежда като моментен център на скоростите. Скоростите на останалите точки ще се определят по формулите, показани на фигурата.

Трябва да се отбележи, че моментният център на скоростите е геометрична точка, и не бива да се отъждествява с материална точка от тялото. Така например на снимката от фиг.8 моментният център е т.О', но при по-нататъшното движение на колелото тази точка ще заеме мястото на т.А, а моментен център ще стане т.С и т.н.

Равнинното движение на диск, търкалящ се по равнина без приплъзване, трябва ясно да се разграничава от ротационното движение на диск, въртящ се около неподвижна ос.

<p>Ротационно движение</p> <ul style="list-style-type: none"> - въртене около неподвижна ос; - скоростите се определят по формулата $V = \omega R$, където R е радиусът на колелото 	<p>Колело на велоергометър</p>  <p>$V_A = V_B = V_C = \omega R$</p>	<p>Равнинно движение</p> <ul style="list-style-type: none"> - търкаляне без приплъзване; - скоростите се определят по формулата $V = \omega R$, където R е разстоянието от точката до контакта с равнината 	<p>Колело на строителна количка</p>  <p>$v_A = \omega \cdot O'A$ $v_C = \omega \cdot O'C$ $v_A = v_C$ $v_B = \omega \cdot O'B = 2v_O$</p>
---	---	--	---

30. СФЕРИЧНО И ОБЩО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО.

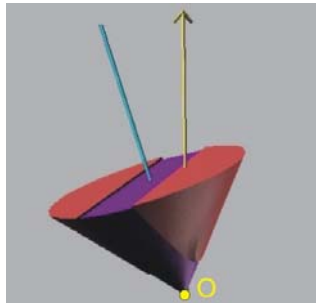


Фиг. 1

В предишна тема разгледахме движението на тяло, което има две неподвижни точки O и A (фиг.1). Тези точки определят една ос на ротация, а движението се нарича *ротационно*.

Нека сега да предположим, че за същото тяло неподвижна остава само т. O . Възможно е тялото да продължи да се върти около оста на ротация, но тя вече няма да бъде неподвижна. Единственото нещо, което може да се каже за нея, е че тя винаги ще минава през т. O .

Тъй като тялото е недеформируемо, движението на всяка точка от него ще се подчинява на условието разстоянието между нея и неподвижната точка да е постоянно. Така например т. M от фиг.3 по време на движението си в различни моменти ще заема различни



Фиг. 2

положения, но всички те ще отстоят на еднакво разстояние R от неподвижната т. O . Геометричното място на точките, намиращи се на едно и също разстояние от една точка, е сферата. Поради това движението на тяло с една неподвижна точка, се нарича *сферично*.

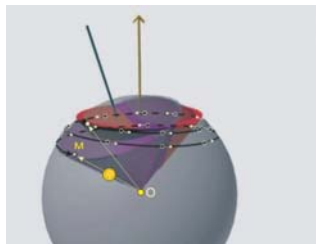
Сферичното движение на тяло може да бъде определено със закона, по който то се върти около някаква ос (ос на собственото въртене) и закона, по който тази ос се движи в пространството.

Както е известно от предишните теми, въртенето на тялото около неподвижна ос се описва с ъгъла на собствено въртене φ (фиг.4).

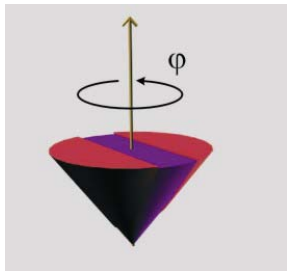
Движението на оста на собствено въртене в пространството се определя от два ъгъла.

Ъгълът θ , на който оста на собствено въртене се отклонява от координатната ос по време на движението, се нарича ъгъл на нутация (фиг.5).

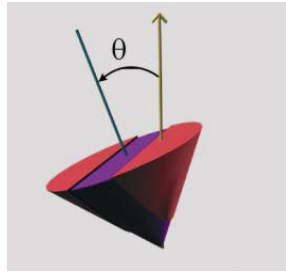
Ъгълът ψ , на който оста на собствено въртене се завърта около координатната ос по време на движението, се нарича ъгъл на прецесия (фиг.6).



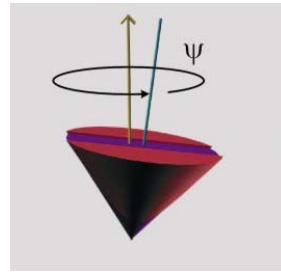
Фиг. 3



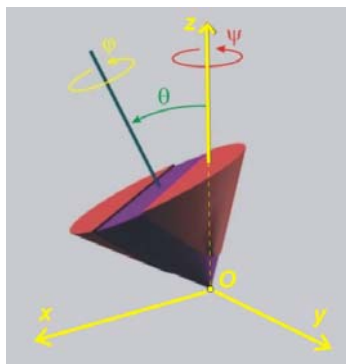
Фиг.4



Фиг.5



Фиг.6



Фиг.7

Познаването на тези три ъгла определя положението на тялото спрямо неподвижната координатна система $Oxyz$ (фиг.7). Следователно сферичното движение на тяло има три степени на свобода.

Трите зависимости на тези ъгли от времето t ще представляват закона за движение. Следователно законът на движението за тяло около една неподвижна точка ще се изразява с три уравнения:

$$\varphi = f_1(t),$$

$$\theta = f_2(t),$$

$$\psi = f_3(t).$$

Скоростта, с която една т.М от тялото се завърта около оста на собствено въртене, може да бъде определена по формулата

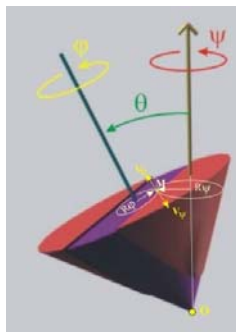
$$V_\varphi = R_\varphi \frac{d\varphi}{dt} = R_\varphi \omega_\varphi,$$

където ω_φ е ъгловата скорост, а R_φ е разстоянието от точката до оста (фиг.8).

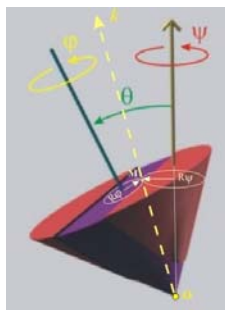
Скоростта, с която същата точка се завърта около координатната ос, може да бъде определена по формулата

$$V_\psi = R_\psi \frac{d\psi}{dt} = R_\psi \omega_\psi,$$

където ω_ψ е ъгловата скорост, а R_ψ е разстоянието от точката до оста (фиг.8).



Фиг.8



Фиг.9

Както се вижда от фигурата, двете скорости имат едно направление, но противоположни посоки.

Винаги можем да намерим такава т.М, която да отстои от двете оси на разстояния, за които да е изпълнено отношението

$$\frac{R_\varphi}{R_\psi} = \frac{\omega_\psi}{\omega_\varphi},$$

така че

$$R_\varphi \omega_\varphi = R_\psi \omega_\psi,$$

или

$$V_\varphi = V_\psi.$$

Тъй като двете скорости имат противоположни посоки, за скоростта на т.М ще получим

$$V_M = V_\varphi + V_\psi = 0,$$

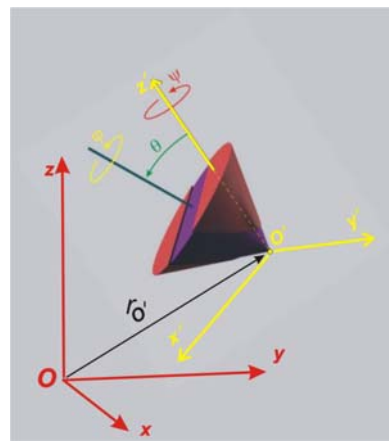
или т.М ще бъде неподвижна.

Двете точки М и О определят права *k*, точките на която са неподвижни в разглеждания момент. Както при равнинното движение беше дефинирана неподвижна точка като моментен център на скоростите, така и при сферичното движение правата *k* може да бъде дефинирана като моментна ос на въртене (ос на ротация). В различните моменти тя има различни направления, които обаче винаги минават през т.О. Така сферичното движение може да бъде разглеждано като поредица от последователни завъртания около моментните оси на ротация.

Информацията в направеното дотук изложение е достатъчна, за да получите на изпита пълния актив за този въпрос. Трябва да знаете обаче, че това представяне на сферичното движение е твърде опростено. За пълноценно боравене с тази материя е необходимо по-задълбоченото ѝ изучаване от съответните литературни източници.

ОБЩО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО

Един от подходите при дефиниране на общото движение е да се изходи от сферичното движение. От изложението по предишната тема стана ясно, че единственото ограничение, което се налага върху тялото при сферичното движение, е една точка от тялото да бъде неподвижна. Ако отпадне и това ограничение, движението може да се нарече *общо*, без никакви ограничения.



Фиг. 10

За да опишем движението на тялото при този подход, към трите уравнения на сферичното движение трябва да прибавим и три уравнения (при координатен метод) от закона за движение на точката (т.О' на фиг.10). Следователно общото движение има шест степени на свобода, а законът за движение има вида:

$$\begin{array}{ll} X_{O'} = x(t) , & \varphi = f_1(t), \\ Y_{O'} = y(t) , & \theta = f_2(t), \\ Z_{O'} = z(t) . & \psi = f_3(t). \end{array}$$

Един друг подход, който е необходимо да изложите на изпита, ако ви се падне този въпрос от конспекта, беше описан в началото на раздела за кинематика на тяло (стр.28-1).

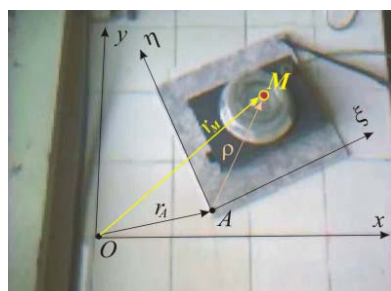
31. КИНЕМАТИКА НА СЪСТАВНО ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА

В предишни теми разгледахме случаи на определяне на скорости и ускорения на точки от тела, извършващи ротационно или равнинно движение. Съществуват обаче случаи, когато една точка участва едновременно в две или повече движения. Такова движение на точка се нарича *съставно*.

Нека да разгледаме работния елемент на една електромагнитна бъркалка. Когато тя е поставена неподвижно върху работния плот, точките от работния елемент могат да бъдат разгледани като точки от тяло, извършващо ротационно движение. Нещата се усложняват, ако задвижим бъркалката спрямо работния плот. Тогава работният елемент се премества спрямо съда и основата на бъркалката, но едновременно с това той заедно с всички части на бъркалката участва в движението спрямо плота.



Фиг.1



Фиг.2

За описание на движението на бъркалката в този случай можем да използваме неподвижната (абсолютната) координатна система Oxy , свързана с неподвижния плот, и подвижната (локална) координатна система $O\xi\eta$, свързана с движещата се основа на бъркалката (фиг.1).

Положението на една движеща се точка M можем да определим както спрямо неподвижната координатна система с радиус-вектора r_M (фиг.2), така и спрямо подвижната координатна система с радиус-вектора ρ . Трябва да се отбележи, че за разлика от точките на тяло, извършващо равнинно движение, тук радиус-векторът ρ е променлив както по направление, така и по големина (дължина).

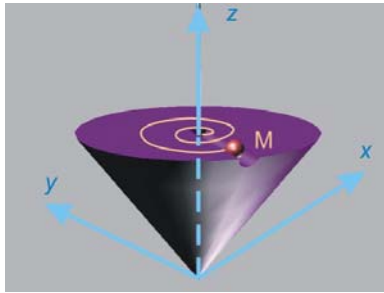
Движението на т. M спрямо неподвижната координатна система ще бъде напълно определено, ако се познава законът за движение

$$r_M = f_1(t).$$

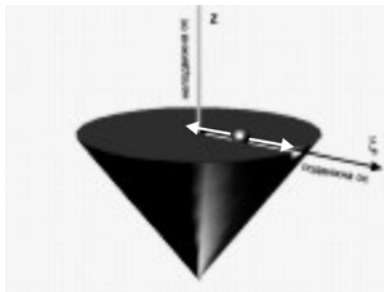
От фиг.2 се вижда, че радиус-векторът на т. M може да се представи с векторната сума

$$r_M = r_A + \rho.$$

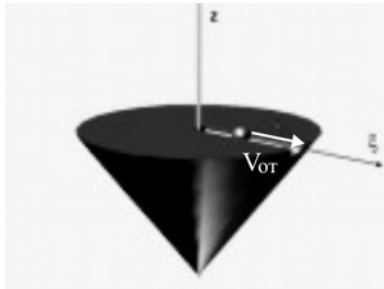
Приблизително можем да кажем, че ρ описва движението на точката в рамките на подвижната координатна система, а r_A - на подвижната координатна система (без завъртането) спрямо неподвижната. В техниката често се срещат случаи, при които движението на точката спрямо неподвижната координатна система е много сложно, но разгледани по отделно, движението на точката спрямо подвижната система и движението на подвижната система спрямо неподвижната са прости. За удобство са въведени три понятия за трите вида движения:



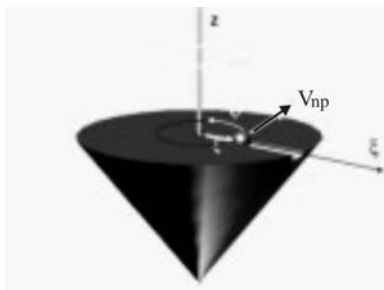
Фиг.3



Фиг.4



Фиг.5



Фиг.6

□ Абсолютно движение - движението на т.М спрямо неподвижната (глобалната) координатна система.

□ Относително (релативно) движение - движението на т.М спрямо подвижната (локалната) координатна система.

□ Преносно движение.

Това движение изисква по-подробно пояснение. Нека си представим т.М като неподвижна спрямо локалната координатна система ("замръзнала" в системата $O\xi\eta$). Тогава тя ще се движи заедно с всички точки от тази система. Движението на т.М спрямо неподвижната координатна система като "замръзнала" в локалната система, се нарича преносно движение.

Трите движения и формирането на скоростта и ускорението на т.М при съставно движение ще бъде илюстрирано със следния пример:

Нека да разгледаме едно тяло, което се движи ротационно спрямо неподвижната координатна система, и т.М, която се движи праволинейно спрямо тялото.

Ротационното и праволинейното движение не са от най-сложните за анализ движения. Движението на точката спрямо неподвижната система обаче, ще бъде далеч по-сложно от праволинейното (фиг.3).

За неговото изучаване може да бъде фиксирана една неподвижна ос на въртене z за описание на ротационното движение на тялото и една подвижна ос ξ за изучаване на праволинейното движение на точката спрямо тялото (фиг.4). Нека да разгледаме тези движения:

□ Относително движение – праволинейното движение на точката спрямо оста ξ (тялото не се движи, фиг.5).

Законът за движение ще бъде $\xi = \xi(t)$. Скоростта на точката при това движение се нарича *относителна скорост* и ще бъде

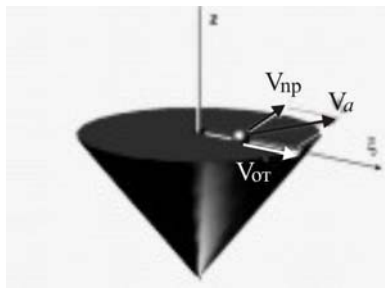
$$V_{om} = \frac{d\xi}{dt}.$$

□ Преносно движение - въртенето на точката заедно с тялото около оста z (фиг.6).

Законът за движение ще бъде $\varphi = \varphi(t)$, а скоростта на въртене – $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Скоростта на точката при това движение се нарича *преносна скорост* и големината ѝ ще бъде (скорост на точка от тяло, извършващо ротационно движение):

$$V_{np} = \xi \omega.$$



Фиг.7

□ Абсолютно движение - движението на точката спрямо неподвижната координатна система

Скоростта на точката при абсолютното движение се нарича *абсолютна скорост* V_a и се определя като сума от относителната и преносната скорост. Скоростите са векторни величини и сумирането трябва да бъде извършено по правилата за сумиране на вектори (фиг.7).

$$V_a = V_{om} + V_{np}.$$

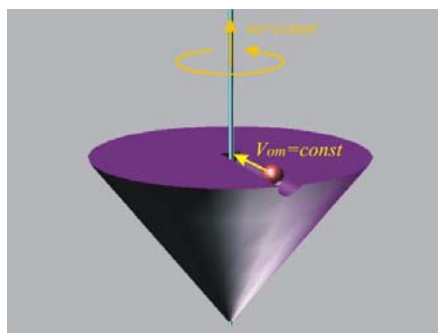
При получаване на абсолютното ускорение се подхожда по същия начин. Тук обаче математичният извод е твърде сложен поради факта, че радиус-векторът на относителното движение е променлив както по направление, така и по дължина, което твърде усложнява неговото диференциране. На този етап е достатъчно да знаете, че в някои случаи дори преносното и относителното движение да са равномерни, когато преносното движение е ротационно, съществува едно допълнително, *кориолисово* ускорение. Така че в общия случай, абсолютното ускорение a_a се получава като векторна сума от **относителното** ускорение a_{om} , **преносното** ускорение a_{np} и **кориолисовото** ускорение $a_{кор}$:

$$a_a = a_{om} + a_{np} + a_{кор}.$$

Повече за кориолисовото ускорение

В някои случаи, дори преносното и относителното движение да са равномерни, когато преносното движение е ротационно, скоростта променя големината си. Това се дължи на едно допълнително ускорение, което не е нито преносно, нито относително. То се формира по следния начин:

Нека в разгледания вече пример преносното и относителното движение да са равномерни (фиг.1). Съставното движение на точката може да бъде разложено на две прости движения:

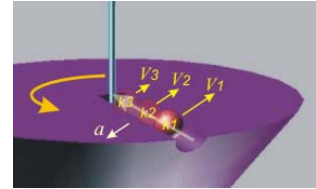


Фиг.1

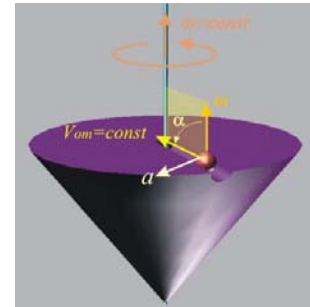
А) Когато точката се движи към центъра на въртене, тя попада последователно в положения k_1 , k_2 и k_3 – скоростта ѝ намалява (фиг.2). Това предполага наличието на едно ускорение, насочено обратно на посоката на движение – кориолисово ускорение. То има следните характеристики:

- големина $a_{кор} = 2\omega \cdot V_{om} \cdot \sin\alpha$ (α е ъгълът между ω и V_{om})
- направление – перпендикулярно на равнината, образувана от ω и V_{om} ;
- посока – такава, че наблюдател, който гледа срещу ускорението (срещу вектора $a_{кор}$), да вижда сливането на ω с V_{om} в посока обратна на часовниковата стрелка (фиг.3).

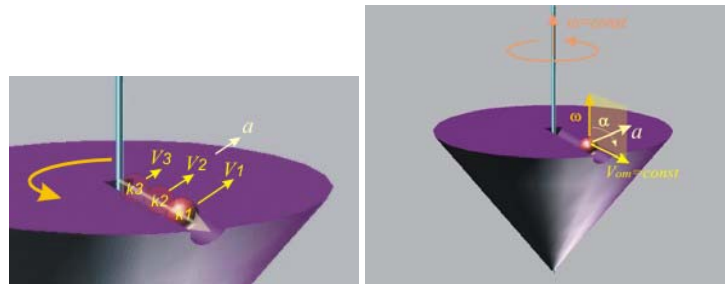
Когато точката се движи от центъра на въртене към периферията, тя попада последователно в положения k_3 , k_2 и k_1 – скоростта ѝ нараства. Това предполага наличието на ускорение, насочено по посока на движението.



Фиг.2



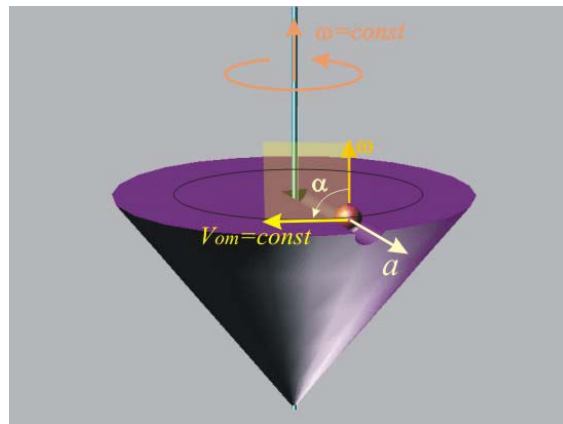
Фиг.3



Фиг.4

В) Когато точката се движи по окръжност (например обратно на посоката на въртене, фиг.5) и разстоянието от нея до оста на въртене не се променя, кориолисовото ускорение съвпада с нормалната компонента на преносното движение и има отношение само към промяната на направлението на скоростта.

В общия случай кориолисовото ускорение се образува едновременно по процесите от А) и В).



Фиг.5

32. ОСНОВНО УРАВНЕНИЕ НА ДИНАМИКАТА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА. ПРИНЦИП НА ДАЛАМБЕР

В темите от раздел "Статика" разгледахме условията за равновесие на телата под действие на система от сили. В раздел "Кинематика" разгледахме движението на телата и някои случаи на определяне на скорости и ускорения. С тази тема започва нов раздел - "Динамика", чийто предмет е изучаване на движението на телата и формирането на скорости и ускорения под действие на приложените сили. При анализа на движението, какъвто ще бъде направен тук, ще бъдат изведени формули, позволяващи решаването на следните два вида задачи:

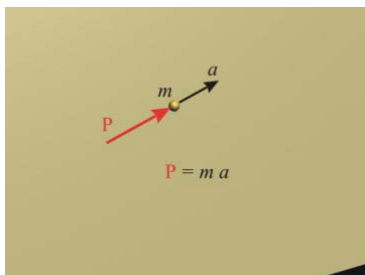
- При известно движение на материалния обект да бъдат определени силите, предизвикващи това движение.
- При известни сили, действащи върху материалния обект, да бъде определен законът за движението му.

Както в другите два раздела на Теоретичната механика, и тук анализа ще започнем с материална точка. Основният инструмент, който ще бъде

използван, е известният Ви (надявам се) от физиката Втори закон на Нютон (основен закон на динамиката):

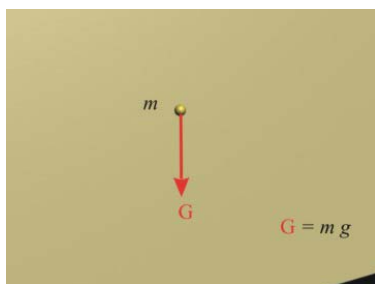
Големината a на ускорението на дадена точка е правопрпорционално на силата P , която действа върху нея и обратно-пропорционално на нейната маса m (фиг.1).

$$a = \frac{P}{m} \text{ или } P=ma.$$



Фиг. 1

За да се придаде на дадена точка определено ускорение a , колкото по-голяма маса има точката, толкова по-голяма трябва да бъде силата.

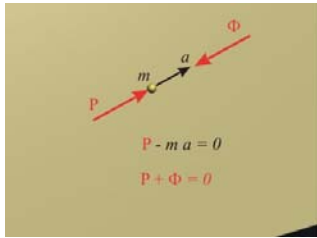


Фиг. 2

Върху телата, които се намират в обхвата на гравитационно поле, действа сила на тежестта, насочена към центъра на привличане.

Близо до земната повърхност силата на земното привличане G (на тежестта) се възприема насочена вертикално надолу (фиг.2).

Ускорението, което придобиват телата под действие на силата на тежестта при нулева надморска височина, е $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$, $g \approx 9.78 \text{ m/s}^2$ на екватора и $g \approx 9.83 \text{ m/s}^2$ на полюса.



Фиг. 3

Движението на материална точка с ускорение a поражда инерционна сила

$$\Phi = -ma$$

с направление и големина както на силата P , която поражда движението, но с противоположна посока.

Основното уравнение може да бъде преработено така, че вдясно да остане 0 :

$$P - ma = 0.$$

Като се замести инерционната сила Φ по определение, се получава уравнение за равновесие на системата сили Φ и P :

$$P + \Phi = 0.$$

Полученото уравнение може да бъде тълкувано по следния начин (Принцип на D'Alembert):

Ако към силата, действаща върху точката, се приложи и инерционната сила, получената система ще бъде в равновесие.

С помощта на принципа на D'Alembert всяка задача от динамика на точка може да се реши с методите на статиката, тъй като задачата се свежда до равновесие на сходяща система сили.

Действието на принципа ще бъде илюстриран със следните задачи:

Определяне на сила, действаща върху точка с известно движение

Условие:

Точка с маса m се движи в равнина под действие на силата P по следния закон:

$$x = 3 \sin(\pi t); y = 5 \cos(\pi t).$$

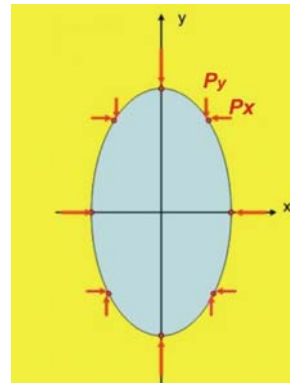
Да се определи силата, предизвикваща движението

Решение:

Като подготовка на решението, първо ще определим траекторията, по която се движи точката. За целта ги преработваме така, че от едната страна на равенството да остане само

тригонометричният израз: $\frac{x}{3} = \sin(\pi t)$,

$$\frac{y}{5} = \cos(\pi t)$$



Фиг. 1

повдигаме двете уравнения на квадрат: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \sin^2(\pi t)$

$$\left(\frac{y}{5}\right)^2 = \cos^2(\pi t)$$

и събираме левите и десните страни. Двете суми трябва да са равни:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)$$

Понеже $\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t) = 1$, то окончателно за траекторията получаваме:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \text{ - уравнение на елипса.}$$

Решението на задачата и намирането на компонентите P_x и P_y на силата се провежда за всяка ос поотделно (фиг.1). За прегледност решението е подредено в таблица.

	По x	По y
1. Основното уравнение на динамиката $ma = P$ се проектира по двете оси.	$m a_x = P_x$	$m a_y = P_y$
2. Компонентите на ускорението се определят чрез двукратно диференциране на закона на движението.	$x = 3 \sin(\pi t)$ $V_x = \frac{dx}{dt} = 3 \cos(\pi t);$ $a_x = \frac{dV_x}{dt} = -3 \sin(\pi t)$	$y = 5 \cos(\pi t)$ $V_y = \frac{dy}{dt} = -5 \sin(\pi t)$ $a_y = \frac{dV_y}{dt} = -5 \cos(\pi t)$
3. Заместване на получените компоненти на ускорението в основното уравнение на динамиката.	$P_x = -3 m \sin(\pi t),$	$P_y = -5 m \cos(\pi t)$

Силата може да бъде описана с компонентите си в някои характерни моменти от движението ($t=0$; $t=1s$; $t=2s$; $t=3s$ и т.н., Фиг.2).

Като разполагаме с компонентите по двете оси, за всеки момент може да бъде определена и пълната големина на силата по формулата $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$.

□ Определяне на характеристиките на движението на точка при известна сила, действаща върху нея.

Условие:

Точка с маса m е хвърлена под ъгъл θ спрямо хоризонта с известна началната скорост на движението $V=V_0$.

Да се определят характеристиките на движението (скорост, ускорение и закон за движение) и големините на ъгъла, при които точката ще достигне най-голяма височина или най-голяма далечина на полета (съпротивителните сили се пренебрегват).

Решение:

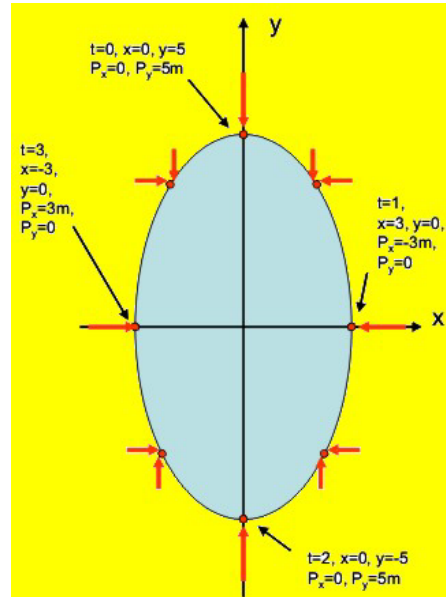
За описание на движението се прекарва координатна система XOZ с начало в началното положение на точката ($X_0=0$ и $Z_0=0$, фиг.1).

Единствената сила, която действа на точката, е силата на теглото G (фиг2). Тя е насочена по оста z , така че проекциите на силата, действаща върху точката ще бъдат $P_x=0$ и $P_z = -G$.

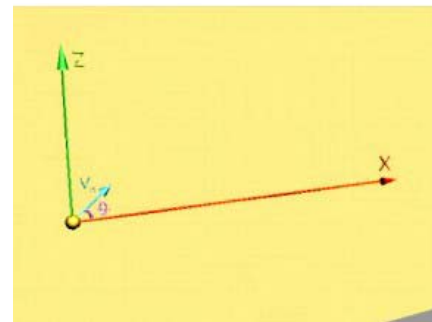
Диференциалните уравнения на движението ще се получат, като основното уравнение $ma=P$ се проектира по двете оси:

$$ma_x = 0; \quad ma_z = -G$$

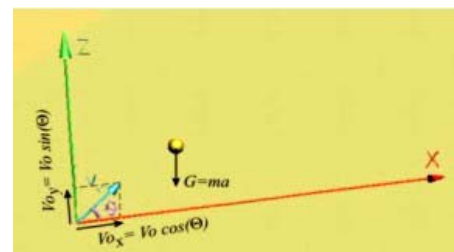
или $a_x = 0; \quad a_z = -g.$



Фиг. 2



Фиг.1



Фиг.2

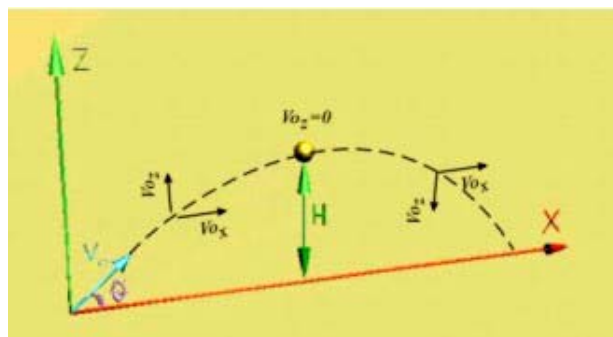
Решението на задачата и намирането на характеристиките на движението се провежда за всяка ос поотделно. За прегледност решението е подредено в таблица.

	По x	По y
1. С еднократно интегриране се получават изрази за скоростта: Неизвестните константи определяме от условието, че при $t=0$ компонентите на скоростта са известни (виж фиг.2)	$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0; V_x = \text{const};$ $V_x = V_{Ox} = V_O \cos(\theta)$	$a_z = \frac{dV_z}{dt} = -g; V_z = -gt + C_2$ $V_{Oz} = V_O \sin(\theta) = 0 + C_2;$ $V_z = -gt + V_O \sin(\theta)$
2. С още едно интегриране се получават изрази за закона за движение: Неизвестните константи C_3 и C_4 определяме от условието, че при $t=0$ точката се намира в началото на координатната система (виж фиг.2)	$V_x = \frac{dX}{dt} = V_O \cos(\theta);$ $X = V_O t \cos(\theta) + C_3;$ $X_0 = 0 + C_3 = 0;$ $X = V_O t \cos(\theta)$	$V_z = \frac{dZ}{dt} = -gt + V_O \sin(\theta);$ $Z = -\frac{gt^2}{2} + V_O t \sin(\theta) + C_4;$ $Z_0 = 0 + 0 + C_4 = 0;$ $Z = -\frac{gt^2}{2} + V_O t \sin(\theta)$

Анализ на движението

Определяне на височината H на полета

Височината на полета ще определим, като в уравнението на закона за движение по ординатата z заместим времето с неговата стойност t_H в момента, когато точката достига максимална височина.



Фиг. 3

Моментът t_H ще определим от условието, че когато точката достига максимална височина, проекцията на скоростта върху оста y е нула:

$$-gt_H + V_O \sin(\theta) = 0$$

$$t_H = \frac{V_O \sin(\theta)}{g}$$

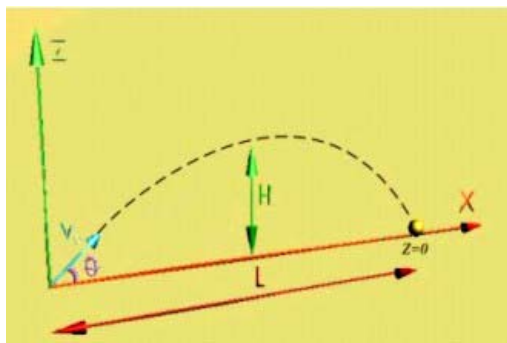
Заместваме времето t_H в уравнението за Z :

$$Z = -\frac{gt^2}{2} + V_O t \sin(\theta) \rightarrow t = t_H = \frac{V_O \sin(\theta)}{g} \rightarrow H = Z; \rightarrow$$

$$H = -\frac{gt_H^2}{2} + V_O t_H \sin(\theta)$$

$$H = \frac{V_O^2 \sin^2(\theta)}{2g}$$

□ Определяне на далечината L на полета



Фиг. 4

Далечината на полета ще определим, като в уравнението на закона за движение по ординатата x заместим времето с неговата стойност t_L в момента, когато точката отново падне на хоризонталната ос.

Моментът t_L ще определим от условието, че в началото ($t=0$) и в края ($t=t_L$) на полета координатата Z е нула (фиг.4).

$$Z = -\frac{gt^2}{2} + V_O t \sin(\theta) \rightarrow -\frac{gt_L^2}{2} + V_O t_L \sin(\theta) = 0;$$

$$t_L = \frac{2V_O \sin(\theta)}{g}$$

Заместваме времето t_L в уравнението за x :

$$L = V_O t_L \cos(\theta);$$

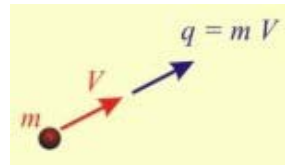
$$X = V_O t \cos(\theta) \rightarrow t = t_L = \frac{2V_O \sin(\theta)}{g} \rightarrow L = \frac{2V_O^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g} = \frac{V_O^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Най-голяма стойност L ще има при $\sin(2\theta)=1$ или при $2\theta = \frac{\pi}{2}$, откъдето

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{или още } \theta = 45^\circ.$$

33. ТЕОРЕМА ЗА КОЛИЧЕСТВОТО НА ДВИЖЕНИЕТО НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

Количество на движението на материална точка, която има маса m и се движи със скорост v , се нарича векторната величина $q = mv$ (масата по скоростта, фиг.1).



Фиг.1

Направлението и посоката на количеството на движението съвпадат с тези на скоростта, а дименсията му е $\frac{kg \cdot m}{s}$.

За извеждане на израз за определяне на q се изхожда от основното уравнение на динамиката: $P=ma$. Ускорението се замества като първа производна на скоростта $a = \frac{dv}{dt}$ и се получава: $P = m \frac{dv}{dt}$, а масата прехвърляме под диференциала (позволено е, защото е скаларна величина и не зависи от времето):

$$P = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Това уравнение е известно като теорема за количеството на движението на точка - производната на количеството на движението по отношение на времето е равна на силата, действаща върху точката.

В техническите задачи тази теорема по-често се използва в нейния интегриран вид. Той се получава, като първо разделим променливите - всяка да е от различна страна на равенството:

$$P = \frac{d(mv)}{dt} \rightarrow P dt = dq,$$

и интегрираме между началния момент ① и крайния момент ② на движението:

$$\int_{t_1}^{t_2} dq = \int_{t_1}^{t_2} P dt \rightarrow q_2 - q_1 = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

Интегралът $\int_{t_1}^{t_2} P dt$ се нарича импулс I на силата. Окончателният вид на уравнението става:

$$q_2 - q_1 = I,$$

или: **Промяната на количеството на движението за краен интервал от време е равно на импулса на силата, действаща върху точката.**

Скоростта и силата са векторни величини, така че в техническите задачи решението често се провежда с помощта на проекциите на уравнението върху трите координатни оси - получава се система от три уравнения:

$$\begin{aligned} (q_2)_x - (q_1)_x &= I_x, \\ (q_2)_y - (q_1)_y &= I_y, \\ (q_2)_z - (q_1)_z &= I_z. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА ЗА КИНЕТИЧНИЯ МОМЕНТ НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

Кинетичният момент K_O^M на материална точка M , която има маса m и се движи със скорост v спрямо произволна точка O , се нарича *момент на количеството на движението* спрямо същата точка: $K_O^M = r \times q$ (фиг.1).

Големината, направлението и посоката на кинетичния момент се определят по правилата, дефинирани и за момент на сила спрямо точка, а дименсията му е $\frac{kg \cdot m^2}{s}$.

Подобно на момент на сила спрямо точка, и кинетичният момент е векторна величина и може да се проектира върху координатните оси, така че да се получи кинетичен момент спрямо ос.

Израз за определяне на K_O^M може да се получи, като диференцираме уравнението $K_O^M = r \times q$ по отношение на времето:

$$\frac{d(K_O^M)}{dt} = \frac{d(r \times q)}{dt} \rightarrow \frac{d(K_O^M)}{dt} = \frac{dr}{dt} \times q + r \times \frac{dq}{dt}.$$

В дясната част на равенството изразът се получи малко сложен, поради което се налагат обяснения:

- За първото събираемо $\frac{dr}{dt} \times q$.

Производната на радиус-вектора е равна на скоростта $\rightarrow \frac{dr}{dt} = v$. Количеството на движението е $q = mv$. Така първото събираемо става $\frac{dr}{dt} \times q = v \times mv$. Но векторите v и mv са колинеарни (mv е същият вектор v , но с различна дължина, понеже е умножен с m). Поради това векторното произведение $v \times mv = 0$.

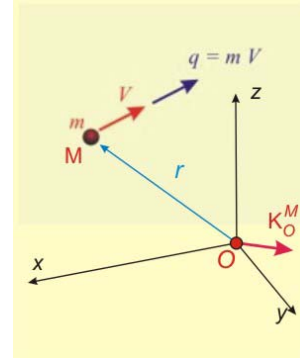
- За второто събираемо $r \times \frac{dq}{dt}$.

Тук внимание заслужава членът $\frac{dq}{dt}$. Той може да бъде преработен така:

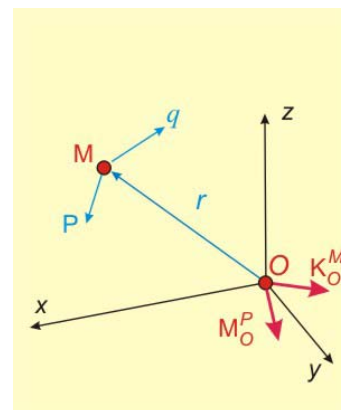
$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{d(v)}{dt} = ma = P.$$

След като заместим тези резултати в уравнението за кинетичния момент, получаваме:

$$\frac{d(K_O^M)}{dt} = \frac{dr}{dt} \times q + r \times \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{d(K_O^M)}{dt} = 0 + r \times P.$$



Фиг.1



Фиг.2

Това, което се получи вдясно на равенството, по дефиниция представлява момент на силата, действаща върху материалната точка, спрямо същата геометрична точка, за която търсим кинетичния момент: $r \times P = M_O^P$ (фиг.2). Или окончателно

$$\frac{d(K_O^M)}{dt} = M_O^P.$$

Това уравнение е известно като теорема за кинетичния момент, която гласи:

Производната на кинетичния момент спрямо дадена точка е равна на момента на действащата сила спрямо същата точка.

В частния случай, когато моментът на силата спрямо избраната точка е нула, кинетичният момент е постоянна величина - спрямо тази точка важи теоремата за запазване на кинетичния момент:

$$\frac{d(K_O^M)}{dt} = 0 \rightarrow K_O^M = const.$$

Същото важи за моментите спрямо дадена ос.

Действието на теоремата ще демонстрирам с примера *Топче на нишка* (стр.175 от [4])

Условие:

Сачмата М е завързана към шнура МОА (фиг.1), който минава през вертикална тръба. Сачмата обикаля около тръбата по окръжност с радиус R_0 и прави 120 оборота в минута. Чрез бавно издърпване на шнура се скъсява частта му вън от тръбата, така че сачмата да описва окръжност с радиус $R=0.5R_0$.

Да се определи колко оборота в минута прави сачмата при това ново положение.

Решение:

Задачата ще бъде решена с помощта на теоремата да кинетичния момент:

$$\frac{d(K_O^M)}{dt} = M_O^P,$$

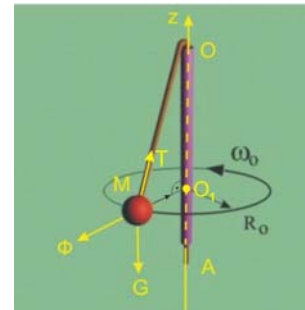
като уравнението от теоремата проектираме върху оста на въртене (оста z от фиг.1).

По време на движението върху сачмата действат три сили.

- Сила на тежестта G . Тази сила е успредна на z , така че моментът ще бъде нула: $M_z^G=0$.
- Инерционна сила Φ . Тази сила пресича z в т. O_1 , така че моментът ще бъде нула: $M_z^\Phi=0$.
- Опънна сила T в нишката. Тази сила пресича z в т. O , така че и нейният момент ще бъде нула: $M_z^T=0$.

От анализа на силите се вижда, че моментът на действащите сили е нула:

$$M_z^P = M_z^G + M_z^\Phi + M_z^T = 0,$$



Фиг.1

и в този случай действа теоремата за запазване на кинетичния момент:

$$\frac{d(K_z^M)}{dt} = 0 \rightarrow K_z^M = \text{const}.$$

Ако фиксираме два момента от движението - ① преди изтегляне на нишката и ② след изтегляне на нишката, от получения израз следва, че кинетичните моменти в двата случая са равни:

$$K_{\text{①}} = K_{\text{②}}.$$

Кинетичните моменти ще бъдат определени за всяко положение поотделно (фиг.2):

- Положение ① - сачмата се върти по окръжност с радиус R_0 с ъглова скорост ω_0 , която формира линейна скорост $v_0 = R_0 \omega_0$.

Кинетичният момент се получава

$$K_{\text{①}} = R_0 v_0 = R_0^2 \omega_0.$$

- Положение ② - сачмата се върти по окръжност с радиус R_1 с ъглова скорост ω_1 , която формира линейна скорост $v_1 = R_1 \omega_1$.

Кинетичният момент се получава $K_{\text{②}} = R_1 v_1 = R_1^2 \omega_1$.

Като приравним двата кинетични момента:

$$R_0^2 \omega_0 = R_1^2 \omega_1,$$

за неизвестната ъглова скорост се получава $\omega_1 = \frac{R_0^2}{R_1^2} \omega_0$, и като се вземе

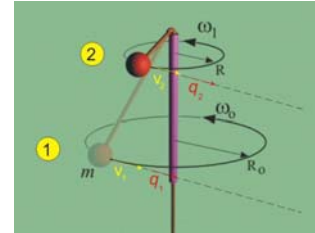
предвид, че по условие $R_1 = 0.5 R_0$:

$$\omega_1 = \frac{R_0^2}{R_1^2} \omega_0 \rightarrow \omega_1 = \frac{R_0^2}{0.5^2 R_0^2} \omega_0 \rightarrow \omega_1 = \frac{1}{0.25} \omega_0 \rightarrow \omega_1 = 4 \omega_0.$$

Същото отношение важи и за техническите ъглови скорости (тези, които се мерят с обороти за минута и се отбелязват със символа n):

$$n_1 = 4 n_0.$$

По условие $n_0 = 120$ об/мин, така че окончателно за неизвестната скорост се получава $n_1 = (4) (120) = 480$ об/мин.



Фиг.2

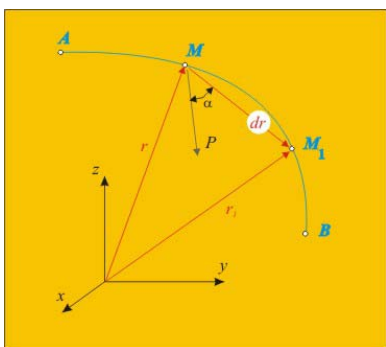
34. РАБОТА И МОЩНОСТ.

ТЕОРЕМА ЗА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ТОЧКА

- РАБОТА

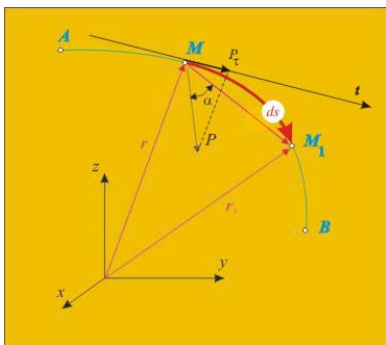
Нека M и M_1 бъдат две безкрайно близки положения (фиг.1) на движещата се точка M под действие на силата P . Известно е, че елементарното преместване на точката ще бъде dr . Елементарна работа dA на силата P се нарича скаларното произведение от вектора-сила P и вектора елементарно преместване dr :

$$dA = P dr \quad (1)$$



Фиг.1

Големината на елементарната работа е стойността на скаларното произведение – $dA = P \cdot dr \cdot \cos \alpha$. Според този израз работата е равна на произведението от преместването и проекцията на силата върху направлението на преместването. Така една сила не извършва работа, ако направлението ѝ е перпендикулярно на силата.



Фиг.2

Дясната част на уравнение (1) представлява скаларно произведение на два вектора.

Ако векторът dr е перпендикулярен на P , тогава $dA = 0$.

Ако проекциите на P върху осите на координатната система $Oxyz$ са P_x, P_y, P_z , а тези на dr са съответно dx, dy, dz :

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz \quad (2)$$

Ако законът на движение е зададен в естествена форма (фиг.2), то работата се определя с криволинейната координата ds и проекцията на силата P върху тангентата към траекторията, или

$$dA = P_\tau ds \quad (3)$$

Уравненията (1), (2), (3) съответстват на трите начина на задаване на движението — векторен, координатен и естествен.

Равнодействащата на една сходяща система сили е

$$R = P_1 + P_2 \dots + P_i \dots + P_n$$

и преместването за всички сили от системата е едно и също - dr . Като заместим този израз в уравнение (1), получаваме:

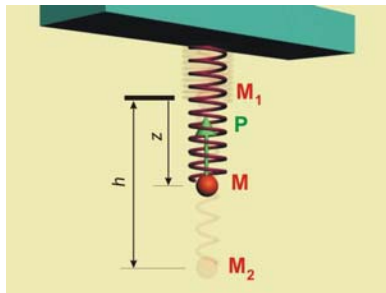
$$R dr = P_1 dr + P_2 dr + \dots + P_i dr + \dots + P_n dr ,$$

$$dA = dA_1 + dA_2 + \dots + dA_i + \dots + dA_n ,$$

или: **елементарната работа на отделните сили на една сходяща система сили е равна на елементарната работа на равнодействащата на системата.**

Ако трябва да намерим работата, която извършва силата за едно крайно преместване, например от точка A до B (фиг. 1, стр. 34-1), е необходимо да интегрираме уравнения (1), (2) или (3). Криволинейният интеграл (ако такъв съществува) се нарича пълна работа:

$$A = \int_A^B dA = \int_A^B P dr = \int_A^B P_x dx + P_y dy + P_z dz = \int_A^B P_\tau ds \quad (4)$$



Фиг. 1

Работата се измерва в джаули. Един джаул е работата, която извършва сила 1 нютон при преместване по направление на силата, равно на един метър, т. е. $1 J = 1 Nm$.

- **Работа на еластична сила**

Нека имаме пружина, на която (фиг. 1) единият край е неподвижно хванат, а другият е свободен. Точка M_1 съответства на положението, което заема свободният край при положение на равновесие на пружината. Ако опънем пружината, в нея се появява еластична сила P , чиято големина е пропорционална на деформацията на пружината, направлението ѝ е по оста на пружината, а посоката — обратна на оста z , определяща положението на свободния край спрямо началното му положение M_1 . Следователно $P = -cz$. Коефициентът c се нарича пружинна константа и се измерва в N/m .

Елементарната работа на силата P съгласно уравнение 2 ще бъде

$$dA = P dz = -c z dz.$$

Пълната работа при опъване на пружината и придвижване на свободния край от т. M_1 до т. M_2 ще бъде

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = -c \int_{z_1}^{z_2} z dz = -c \frac{z^2}{2} \Big|_{z_1}^{z_2} = -c \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} = -\frac{ch^2}{2} , \quad (6)$$

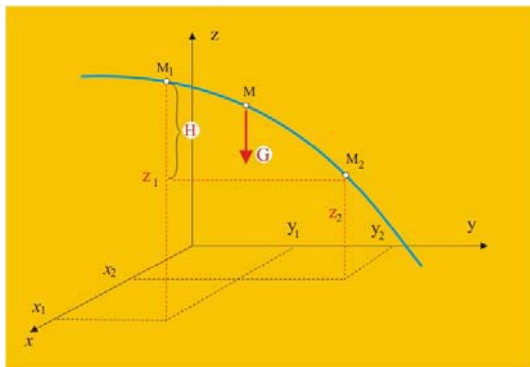
където h представлява деформацията на пружината. В случай, когато пружината се свива след удължаване, за да добие първоначалния си размер, $A = \frac{ch^2}{2} > 0$.

Както се вижда от израз (6), еластичната сила е също една потенциална сила.

Когато движението е отклоняване от равновесното положение, еластичната сила е насочена винаги обратно на посоката на движението и извършваната работа е отрицателна независимо дали се извършва удължаване на пружината или скъсяване.

Ако движението е възстановяване на равновесното положение, посоката на еластичната сила съвпада с посоката на движението и извършваната работа е положителна.

- **Работа на силата на тежестта.**



Фиг. 1

Нека върху точка M (фиг. 1) действа силата на тежестта G . Силата има проекция само по оста z , а по другите две оси проекциите са нула. Поради това елементарната работа съгласно уравнение 2 (координатен начин) е:

$$dA = -G dz$$

(силата е насочена надолу и поради това проекцията ѝ е отрицателна).

Пълната работа според уравнение 4 е

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = -G \int_{z_1}^{z_2} dz = -G(z_2 - z_1) = G(z_1 - z_2) = GH . \quad (5)$$

В разгледания случай работата е положителна, тъй като $z_1 > z_2$ (точката пада). В обратния случай (точката се издига) работата на силата на тежестта ще бъде отрицателна.

Уравнение (5) показва, че работата на теглото не зависи от вида на траекторията на точката, а само от нейната начална (z_1) и крайна (z_2) апликата. Сили, които притежават това свойство, се наричат потенциални. При тях именно работата има пълен диференциал. Положителният или отрицателният знак при работата има само условен смисъл. Работата е положителна, когато силата ускорява движението на точката, а отрицателна - когато забавя това движение.

• МОЩНОСТ

Мощност N наричаме величината, която определя извършената работа за единица време:

$$N = \frac{dA}{dt} = P \frac{dr}{dt} = P \cdot v, \quad (7)$$

т. е. мощността се равнява на скаларното произведение на силата и скоростта на точката. Ако се възползваме от правилото за скаларно произведение на два вектора, ще получим

$$N = P \cdot v = P_x \cdot v_x + P_y \cdot v_y + P_z \cdot v_z, \quad (8)$$

където P_x, P_y, P_z, v_x, v_y и v_z са проекциите на силата и скоростта върху трите координатни оси.

Единицата за измерване на мощността е ват (W): $1 W = 1 J/s$.

От уравнение (7) се вижда, че $A = N \cdot t$, или работата може да се измерва и в единиците ватсекунда [Ws], ватчас [Wh] и киловатчас [kWh].

• ТЕОРЕМА ЗА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ

Кинетична енергия на една точка с маса m и скорост v наричаме скаларната величина E , определена от израза

$$E = \frac{mv^2}{2}. \quad (9)$$

Ще докажем следната теорема, за кинетичната енергия:

ДИФЕРЕНЦИАЛЪТ НА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ДВИЖЕЩА СЕ ТОЧКА Е РАВЕН НА ЕЛЕМЕНТАРНАТА РАБОТА НА ДЕЙСТВАЩАТА ВЪРХУ ТОЧКАТА СИЛА.

Изхождаме от основното уравнение на динамиката

$$m a = P \quad (m - \text{маса, } a = \frac{dv}{dt} - \text{ускорение, } P - \text{сила}),$$

двете страни на което умножаваме скаларно със скоростта v :

$$m \frac{dv}{dt} v = P v, \text{ откъдето се получава } m v dv = P v dt. \quad (10)$$

При анализа на получения израз трябва да се има предвид, че:

$$1. d(v^2) = 2 v dv, \text{ откъдето следва } v dv = d\left(\frac{v^2}{2}\right) \text{ и } m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$2. v = \frac{dr}{dt}, \text{ откъдето } P v dt = P \frac{dr}{dt} dt = P dr = dA \quad (dA \text{ е елементарната работа на силата } P).$$

Като се заместят тези два израза в уравнение (10), се получава диференциалната форма на теоремата:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \cdot \quad (11)$$

Като интегрираме тази форма за периода на движение между началната т.1 и крайната т.2, се получава интегралната форма на теоремата:

$$\int_{t.1}^{t.2} d\frac{mv^2}{2} = \int_{t.1}^{t.2} dA, \quad \text{или} \quad \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12}$$

(v_1 - скорост в началната точка 1, v_2 - скорост в крайната точка 2, A_{12} - пълната работа, извършена от силата при преместване от т.1 в т.2),

т.е. ИЗМЕНЕНИЕТО НА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ТОЧКА Е РАВНО НА ПЪЛНАТА РАБОТА НА СИЛАТА, ДЕЙСТВАЩА ВЪРХУ НЕЯ.

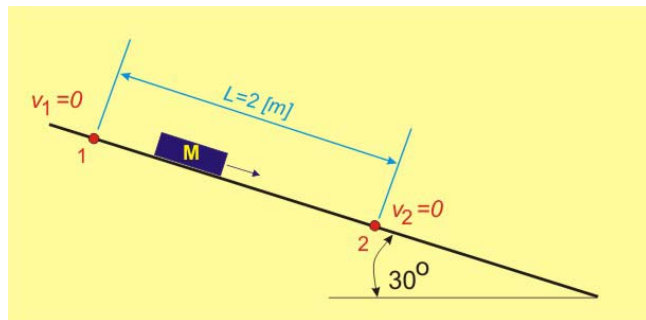
Примери:

□ ЗАДАЧА №1

УСЛОВИЕ:

Тяло М с маса m се спуска без начална скорост по наклонена равнина (фиг.1). Коефициентът на триене между равнината и тялото е $\mu=0.1$.

Да се определи скоростта на точката в момента, когато е изминала път L от два метра.



Фиг. 1

РЕШЕНИЕ:

Моментът на тръгване ще определим като първи, и характеристиките на движението в този момент ще носят индекс 1. Моментът, в който точката е изминала първите два метра ще определим като втори, и характеристиките на движението в този момент ще носят индекс 2.

Тялото извършва транслационно движение, всички точки от него имат равни скорости и ускорения и за анализ на движението може да бъде прилаган апаратът от динамика на точка.

За решаване на задачата ще използваме теоремата за кинетичната енергия в нейния интегриран вид:

$$E_{K_2} - E_{K_1} = A_{12},$$

или разликата между кинетичната енергия във втория момент E_{K_2} и кинетичната енергия в първия момент E_{K_1} е равна на работата A_{12} , извършена от силите, действащи върху точката.

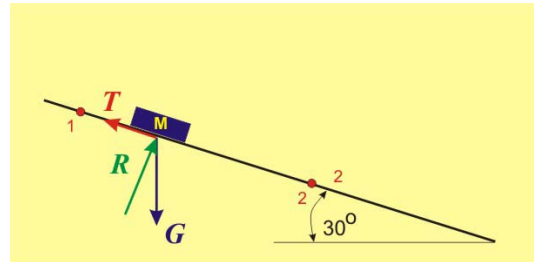
Очевидно, за да решим задачата, трябва да определим трите члена E_{K_2} , E_{K_1} и A_{12} , участващи в равенството.

За кинетичната енергия имаме

израза $E_K = \frac{mv^2}{2}$, така че за първите два члена се получава

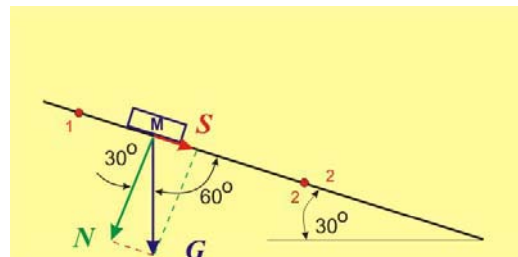
$$E_{K_2} = \frac{mv_2^2}{2} \text{ и } E_{K_1} = \frac{mv_1^2}{2}$$

(v е скоростта на точката).



Фиг.2

По време на движението върху точката действат три сили - силата на тежестта G , реакцията на равнината R и силата на триене T (фиг.2). Така работата A_{12} се получава като сума от следните три събираеми:



Фиг.3

- Работа на силата на тежестта A_G

По определение работата A_P на една сила P при преместване на приложената ѝ точка на разстояние L е $A_P = PL \cos(\alpha)$, където α е ъгълът между силата и преместването (и двете се изобразяват като насочени отсечки, така че при определяне на ъгъла трябва да се внимава за посоките им).

Силата на тежестта можем да разложим на две компоненти - едната по направление на движението (успоредно на равнината) S и другата - нормална на равнината N (фиг.3).

Посоката на S съвпада с посоката на преместването, което означава, че работата на силата на тежестта ще бъде положителна. От фигурата се вижда, че стойността на работата е

$$A_G = GL \cos(60^\circ) = mg \cdot 2 \frac{1}{2} = mg \cdot$$

- Работа на реакцията A_R

Тъй като реакцията е перпендикулярна на преместването, тя по дефиниция няма да извършва работа. Все пак това ще бъде проверено :

$$A_R = RL \cos(90^\circ) = R \cdot 2 \cdot 0 = 0 \cdot$$

- Работа на силата на триене A_T

Силата на триене се определя по формулата $T = \mu N$. Нормалната компонента N може да бъде определена от $\triangle ABC$ на фиг.3 $\rightarrow N = G \sin(60^\circ) \approx mg \cdot 0.866$. Така за силата на триене се получава:

$$T = \mu N = 0.1 mg \cdot 0.866 \approx 0.087 mg \cdot$$

Посоката на силата на триене е противоположна на посоката на преместването, което значи, че работата ще бъде отрицателна:

$$A_T = - T L = - (0.087 mg) (2) = - 0.174 mg \cdot$$

С получените изрази формираме цялата работа, извършена между двата разглеждани момента от движението:

$$A_{12} = A_G + A_R + A_T = mg + 0 - 0.174 mg = 0.836 mg \cdot$$

Да припомним уравнението, с което ще решим задачата:

$$E_{K_2} - E_{K_1} = A_{12}$$

и другите два члена:

$$E_{K_2} = \frac{mv_2^2}{2} \text{ и } E_{K_1} = \frac{mv_1^2}{2} \cdot$$

Като ги заместим в израза, ще получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 0.836 mg \cdot$$

Като вземем предвид, че в първия момент скоростта е нула (тялото тръгва от покой), и съкратим масата от двете страни на равенството, ще получим

$$\frac{v_2^2}{2} - 0 = (0.836)(9.81) \text{ и } v_2^2 - 0 = (2)(0.836)(9.81),$$

откъдето $v_2 \approx \sqrt{16.4}$

и окончателно $v \approx 4.05 [m/s]$.

□ ЗАДАЧА №2

УСЛОВИЕ:

Сачма с маса $m=0.020\text{ kg}$ е поставена в тръба върху свита пружина (фиг.1) с пружинна константа $c=200\text{ N/m}$. Свиването на пружината е определено от деформацията $h_1=0.10\text{ m}$. Определете скоростта, която ще има точката в момента на излитането ѝ от тръбата, и височината h_2 , на която ще се издигне, ако се пренебрегне съпротивлението на въздуха.

РЕШЕНИЕ:

За улеснение на анализа в движението на сачмата ще бъдат фиксирани следните три характерни положения (фиг.2).

- M_2

Положението, при което сачмата достига най-голяма височина. Това е преходно положение, в което сачмата "увисва" при преминаване на движението ѝ от издигане в спускане, така че в този момент нейната скорост е нула.

Изминатият път, който за това положение е h_1+h_2 , не е известен.

- M_1

Това е положението в момента, когато сачмата излита от тръбата. Тук скоростта е неизвестна. Известен е само изминатият път, който е равен на височината h_1 .

- M_0

Това е положението в момента, когато пружината е свита на дъното на тръбата и сачмата е поставена върху нея (начален момент). Този момент тук има индекс нула и се нарича "нулев", защото при анализа се смята за начало на движението

При това положение скоростта е нула (сачмата е в покой).

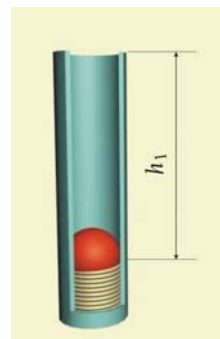
Решението на задачата ще протече в следните два етапа:

1. Определяне на скоростта V_1

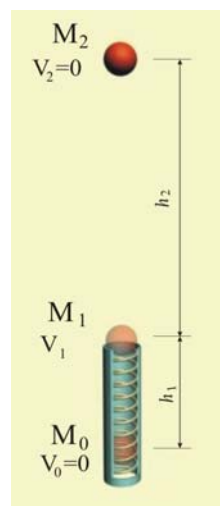
Прилагаме теоремата за кинетичната енергия в интегриран вид за интервала

$M_0 - M_1$ (фиг.3):

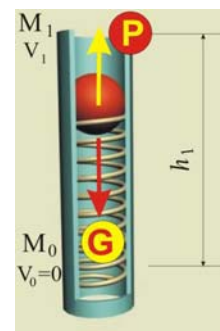
$$E_{k_1} - E_{k_0} = A_{01} \quad \text{или} \quad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (v \text{ е скоростта на точката}).$$



Фиг. 1



Фиг.2



Фиг.3

плата на

это, така

че работата и ще бъде отрицателна:

$$A_G = -mgh_1 \approx -(0.02)(9.81)(0.1) = -0.01962J.$$

Работата на еластичната сила на пружина с постоянна еластична константа се определя по следния начин: $A_P = \frac{ch_1^2}{2} = \frac{200(0.1)^2}{2} = 1J.$

Работата е положителна, тъй като пружината възстановява първоначално равновесно положение, така че посоката на силата съвпада с посоката на движението.

Пълната работа е $A_{01} = A_G + A_P = -0.01962 + 1 = 0.98038J.$

Заместваме получената стойност в уравнението на теоремата, като отчетем и факта, че скоростта V_0 е нула:

$$\frac{0.02v_1^2}{2} - 0 = 0.98038 \text{ от където } v_1^2 = 98.038$$

и окончателно

$$v_1 = \sqrt{98.038} \approx 9.9 \left[\frac{m}{s} \right].$$

2. Определяне на височината h_2

Прилагаме теоремата за кинетичната енергия в интегриран вид за интервала M_0 - M_2 :

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{02}$$

Тук разликата е, че докато силата на тежестта действа през цялото време на движението, еластичната сила действа само в рамките на тръбата, което трябва да бъде отчетено при определяне на работата:

$$A_G = -mg(h_1 + h_2) \approx -(0.02)(9.81)(0.1 + h_2) = -0.1962(0.1 + h_2) = -0.01962 - 0.1962h_2,$$

$$A_P = \frac{ch_1^2}{2} = \frac{200(0.1)^2}{2} = 1J,$$

$$A_{01} = A_G + A_P = -0.01962 - 0.01962h_2 + 1 = 0.98038 - 0.01962h_2 .$$

Заместваме получената стойност в уравнението на теоремата, като отчетем и факта, че скоростта в началото и в края на движението е нула:

$$0 - 0 = 0.98038 - 0.01962h_2 ,$$

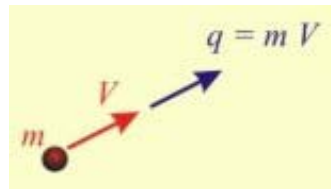
откъдето
$$h_2 = \frac{0.98038}{0.01962} \approx 5[m].$$

35. ТЕОРЕМА ЗА КОЛИЧЕСТВОТО НА ДВИЖЕНИЕТО НА МАТЕРИАЛНА СИСТЕМА

В предишна тема беше дефинирано понятието *количество на движението на материална точка* като вектор, произведен на масата и скоростта на точката (фиг.1):

$$q = mv$$

където m е масата на точката, а v е нейната скорост.



Фиг.1

За механична система от n на брой материални точки количеството на движението Q е сумата от количествата на движението на точките (фиг.2):

$$Q = \sum_{i=1}^n m_i v_i$$

За всяка точка i от механичната система трябва да важи основното уравнение на динамиката

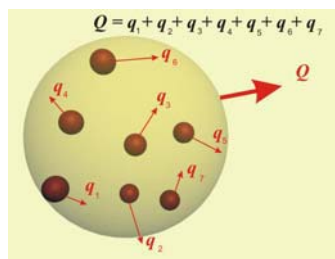
$$m_i a_i = P_i$$

(a е ускорението, а P е действащата върху точката сила).

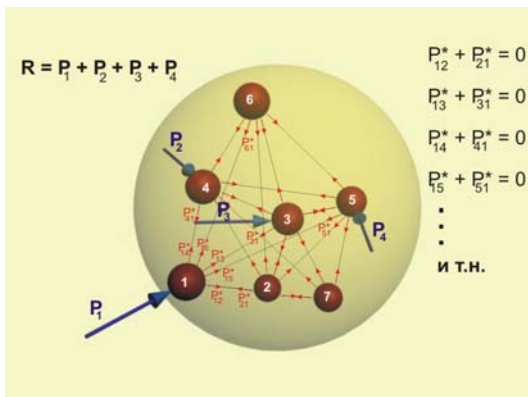
Сумата за всички точки ще бъде

$$\sum m_i a_i = \sum P_i + \sum P_i^*$$

Вдясно на равенството има две събираеми, тъй като върху точките действат външни сили P и вътрешни сили P^* (фиг.3). Както и друг път е споменавано, по принципа на действието и противодействието вътрешните сили се уравновесяват и за сумата им се получава $\sum P_i^* = 0$. Като вземем това предвид, както и връзката между скорост и ускорение на точка, получаваме



Фиг.2



Фиг.3

$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$P_{12}^* + P_{21}^* = 0$
 $P_{13}^* + P_{31}^* = 0$
 $P_{14}^* + P_{41}^* = 0$
 $P_{15}^* + P_{51}^* = 0$
 \vdots
 \vdots
 и т.н.

$$\sum m_i a_i = \sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum P_i$$

В уравнението m_i са константи и могат да минат под диференциала, а сумата от силите, действащи върху системата, е равна на главния вектор R .
Така се получава

$$\sum \frac{d(m_i v_i)}{dt} = R.$$

Сумата от производните е равна на производната на сумата, така че горното уравнение може да бъде записано и като

$$\frac{d}{dt} \sum m_i v_i = R.$$

Като се вземе предвид въведеният израз за количеството на движението на системата, се получава диференциалния вид на теоремата:

$$\frac{dQ}{dt} = R,$$

или: **Производната спрямо времето на количеството на движението на системата е равна на главния вектор на външните сили, действащи върху системата.**

Ако $R=0$, то $\frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow Q = \text{const.}$

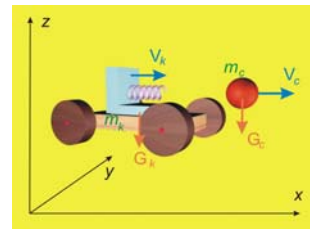
Това уравнение е известно още и като закон за запазване на количеството на движението.

□ Пример №1 Количка и топче

Условие:

Система от количка, пружина и сфера с обща маса $M=6\text{kg}$ се движи с постоянна скорост $V=4\text{m/s}$.

Да се определи скоростта на количката V_k , ако след освобождаване на пружината, сферата с маса $m_c=1\text{kg}$ добива скорост $V_c=30\text{ m/s}$ (фиг.1).



Фиг. 1

Решение:

Ако анализираме действащите върху системата сили в една правоъгълна координатна система, както на фиг.2, ще видим, че ако пренебрегнем силите на триене (в условието не е казано нищо за тях), ще останат сили, действащи само по оста z (силите на тежестта). Скоростта на системата пък е насочена само по оста x . Така че ако проектираме уравнението от теоремата за количеството на движението (в интегрирания й вид) върху оста x , тъй като проекциите $(G_k)_x=0$ и $(G_c)_x=0$, ще се получи

$$(Q_2)_x - (Q_1)_x = \int_{t_1}^{t_2} (G_k)_x dt + \int_{t_1}^{t_2} (G_c)_x dt = 0.$$

$(Q_1)_x$ е проекцията на количеството на движението в първия момент, преди освобождаването на пружината, когато двете тела се движат като едно цяло, с еднаква скорост V . Поради това този член се получава като

$$(Q_1)_x = M V.$$

$(Q_2)_x$ е проекцията на количеството на движението във втория момент, след освобождаването на пружината, когато двете тела се движат самостоятелно с различни скорости. Поради това този член се получава като $(Q_2)_x = m_k V_k + m_c V_c$.

Получените изрази се заместват в уравнението на теоремата първо символно:

$$(Q_2)_x - (Q_1)_x = 0 \rightarrow (m_k V_k + m_c V_c) - M V = 0,$$

а след това и с числените стойности от условието (масата на количката се получава като разлика от общата маса и масата на сферата - $m_k = 6 - 1 = 5 \text{ kg}$): $5 V_k + (1)(30) = (6)(4)$, $5 V_k = 24 - 30$,

$$V_k = -\frac{6}{5} = -1.2 [\text{m/s}].$$

Отрицателният знак тук означава, че след освобождаване на пружината количката ще започне да се движи в посока обратна на положителната посока на оста x (в случая - назад).

Ако скоростта на сферата не беше 30 m/s , а 24 m/s , тогава количката щеше да спре, а ако беше по-малка от 24 m/s , количката щеше да продължи да се движи напред, но с по-малка скорост от началната **(край на първа задача)**.

В конкретните технически задачи теоремата се използва в нейния интегриран вид. Той се получава, като първо разделим променливите - всяка да е от различна страна на равенството:

$$\frac{dQ}{dt} = R \rightarrow dQ = R dt = \sum P_i dt,$$

и интегрираме между началния момент ① и крайния момент ② на движението:

$$\int_{t_1}^{t_2} dQ = \int_{t_1}^{t_2} \sum P_i dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} P_i dt \rightarrow Q_2 - Q_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} P_i dt.$$

Интегралът $\int_{t_1}^{t_2} P_i dt$ се нарича импулс на силата $i \rightarrow I_i$. Окончателният вид на уравнението става

$$Q_2 - Q_1 = \sum I_i,$$

или: **Промяната на количеството на движението на системата е равно на сумата от импулсите на външните сили, действащи върху системата.**

Понякога в техническите задачи е по-удобно да се работи с центъра на тежестта C на системата, като в него се концентрира цялата маса $M_c = \sum m_i$. По този начин количеството на движението става $Q = M_c V_c$. Като диференцираме двете страни на равенството

$$\frac{dQ}{dt} = M_c \frac{dV_c}{dt} \rightarrow R = M_c a_c.$$

Това уравнение изразява теоремата за движение на масовия център: масовият център на системата се движи като една точка, върху която са приложени всички външни сили, действащи върху системата, и с маса, равна на масата на цялата система.

□ Пример №2 Човек и лодка

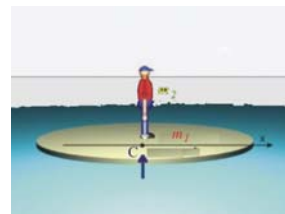
Условие:

Лодка с маса $m_1=100\text{kg}$ е в покой в неподвижна вода. В центъра на тежестта на лодката се намира човек с маса $m_2=70\text{kg}$ (фиг.1).

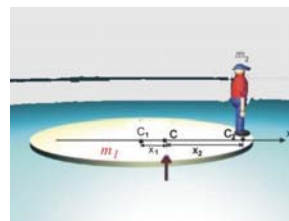
Да се определи положението x_1 на центъра на тежестта на лодката, ако човекът се придвижи до десния борд, който е на разстояние $L=2[m]$ (фиг.2).

Решение:

Единствената сила, която действа върху системата е реакцията на водата N , така че уравнението за движението на масовия център $R = M_c a_C$ има вида



Фиг. 1



Фиг.2

$$N = M_C a_C \cdot$$

За анализ на движението прекарваме правоъгълна координатна система с начало в центъра на тежестта на лодката С. За тази координатна система движението на човека при преместването му към борда е насочено по оста x . Силата N е перпендикулярна на оста x , така че проекцията ѝ е нула. Така за уравнението на движението на масовия център по оста x се получава

$$0 = M_C a_{C,x} \cdot$$

Понеже $a_{C,x} = \frac{dv_{C,x}}{dt}$, а масата на системата не може да е нула, се получава $0 = \frac{dv_{C,x}}{dt}$ или $v_{C,x} = const$.

Тъй като в началния момент лодката е била в покой, уравнението $v_{C,x} = const$ означава, че центърът на тежестта на системата ще остане в покой и по време на движението - $v_{C,x} = 0$. Координатната система беше избрана така, че $x_C = 0$.

След като центърът на тежестта не се движи, той ще запази това положение и когато човекът се придвижи до десния борд. Сега центровете на тежестта на телата от системата не съвпадат и положението на центъра на тежестта на системата трябва да бъде определен по формула

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 \cdot$$

От това уравнение следва, че $x_1 = -\frac{m_2 x_2}{m_1}$.

В началото човекът се е намирал в центъра на тежестта на лодката (фиг.1). При движението си той изминава път $L=2[m]$, което в края на движението ще бъде разстоянието между C_1 и C_2 (фиг.4, това най-добре се вижда от анимацията). Така за координатата x_2 се получава $x_2=L-x_1$. Като заместим числените стойности от условието, се получава

$$x_1 = -\frac{(70)(2-x_1)}{(100)} = -\frac{140-70x_1}{(100)} \text{ и } 100x_1 = -140 - 70x_1,$$

откъдето

$$x_1 = -\frac{140}{170} = -0.82[m].$$

Отрицателният знак тук означава, че при придвижване на човека към десния борд лодката ще се придвижи наляво.

Ако изчислим и координатата на центъра на тежестта на човека, ще видим, че отношението на двете координати е обратнопропорционална на отношението на масите на двете тела.

36. ТЕОРЕМА ЗА КИНЕТИЧНИЯ МОМЕНТ НА МАТЕРИАЛНА СИСТЕМА

В предишна тема беше дефинирано понятието *кинетичен момент на материална точка* като векторно произведение от разстоянието до точката, за която търсим момента и количеството на движението (фиг.1):

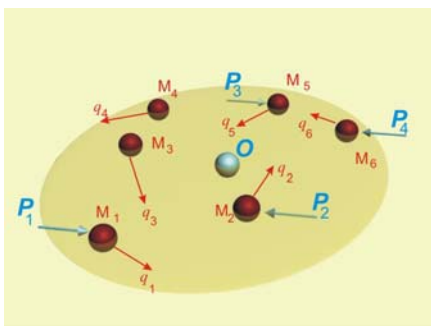
$$K_O^M = r \times q .$$

Беше дефинирана и теорема за кинетичния момент на точка, изразяваща се с уравнението

$$\frac{d(K_O^M)}{dt} = M_O^P ,$$

където M_O^P е моментът на силата, действаща върху точката.

Когато разглеждаме механична система от точки, такова уравнение ще важи за всяка $i^{\text{та}}$ точка (фиг.2):

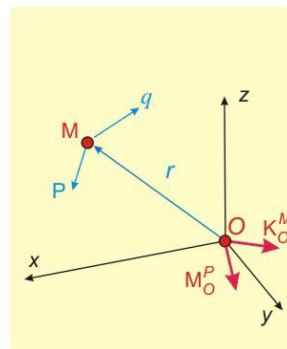


Фиг.2

$$\frac{d(K_O^{Mi})}{dt} = M_O^{Pi} + M_O^{P^*i} .$$

За материална система от n на брой точки ще се получи система от n на брой такива уравнения. От сумирането на левите и десните страни на тази система се получава ново равенство:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(K_O^{Mi})}{dt} = \sum_{i=1}^n M_O^{Pi} + \sum_{i=1}^n M_O^{P^*i} .$$



Фиг.1

Първият член на този израз може да бъде преработен така:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(K_O^{M_i})}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n K_O^{M_i} = \frac{dK_O}{dt},$$

откъдето се вижда, че това е производната на главния вектор на кинетичните моменти K_O по отношение на времето.

Вторият член е сума от моментите на външните сили - главен момент

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O^{P_i}.$$

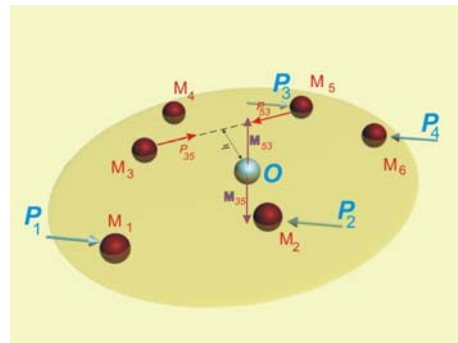
Третият член е сума от моментите на вътрешните сили. Тези

сили се формират по принципа на действието и противодействието между отделните точки. Нека да разгледаме една такава двойка вътрешни сили - силите на взаимодействие между т. M_3 и т. M_5 (фиг.3).

Тези сили са равни

$$P_{35} = P_{53},$$

но с противоположни посоки. Поради това техните моменти спрямо т. O също ще бъдат равни по големина



Фиг.3

и с противоположни знаци

$$P_{35} h = P_{53} h$$

$$M_{35} = -M_{53},$$

така че сумата им ще е нула

$$M_{35} + M_{53} = 0.$$

Това важи за всяка двойка вътрешни сили, така че окончателно главният момент на вътрешните сили се получава нула:

$$\sum_{i=1}^n M_O^{P_i^*} = 0.$$

Като се заместят получените изрази в основното уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(K_O^{Mi})}{dt} = \sum_{i=1}^n M_O^{Pi} + \sum_{i=1}^n M_O^{P*i},$$

се получава окончателният вид на теоремата за кинетичния момент на механична система

$$\frac{d(K_O)}{dt} = M_O,$$

или: Производната по отношение на времето на кинетичния момент спрямо избрана точка е равна на главния момент на външните сили, приложени върху системата, спрямо същата тази точка.

Ако векторното уравнение $\frac{d(K_O)}{dt} = M_O$ се проектира върху осите на една координатна система, ще се получи теоремата в скаларната форма

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x,$$

$$\frac{dK_y}{dt} = M_y,$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z.$$

В частния случай, когато моментът на външните сили спрямо някоя от осите е нула, се получава закона за запазване на кинетичния момент.

Например за оста x $\frac{dK_x}{dt} = 0 \rightarrow K_x = const$,

или: Ако моментът на външните сили спрямо някоя от осите е нула, кинетичният момент на системата спрямо същата точка е постоянна величина.

Теоремата за кинетичния момент най-често се прилага за тела, извършващи ротационно движение. Както вече знаете, това движение се характеризира с ъглова скорост ω и ъглово ускорение ε . За прегледност (и за да избегнем интегралното смятане) при анализа на движението тук тялото се представя като дискретна система от n на брой точки, отстоящи на

разстояние h_i от оста на въртене z и движещи се по окръжност със скорост $V_i = \omega h_i$ (т. M_i от фиг.4).

Количеството на движението на тази точка е

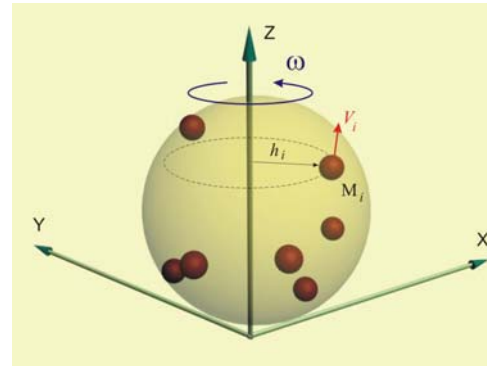
$$q_i = m_i V_i = m_i \omega h_i ,$$

а кинетичният момент

$$K_{iz} = q_i h_i = m_i \omega h_i h_i = m_i \omega h_i^2 .$$

Кинетичният момент на цялото тяло е сума от кинетичните моменти на отделните точки:

$$K_z = \sum_{i=1}^n \omega m_i h_i^2 .$$



Фиг.4

Ъгловата скорост е еднаква за всички точки, така че може да бъде извадена пред сумата:

$$K_z = \omega \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 .$$

Това, което остава в сумата, се дефинира като масов инерционен момент на тялото спрямо оста z :

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 .$$

Така за кинетичния момент се получава окончателно

$$K_z = J_z \omega .$$

Като се приложи теоремата за кинетичния момент върху това уравнение, ще се получи

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z \rightarrow \frac{d(J_z \omega)}{dt} = M_z .$$

Тъй като J_z не зависи от времето, може да бъде изваден пред диференциала:

$$J_z \frac{d(\omega)}{dt} = M_z \rightarrow J_z \varepsilon = M_z$$

и окончателно да се получи $\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}$,

т.е. **Ъгловото ускорение на тялото е обратнопропорционално на масовия инерционен момент спрямо оста на въртене.**

Оттук следва, че масовият инерционен момент е мярка за инертността на тялото при ротационно движение, което може да бъде илюстрирано със следния

□ Пример №1 **Ротационно движение на диск**

Нека да разгледаме два диска с еднаква маса, но с различен радиус, движещи се ротационно с хоризонтална ос на въртене (фиг.1). Въпреки че масите на двата диска са равни, те ще имат различни масови инерционни моменти. Масата на диска с по-голям радиус е разпределена на по-голямо разстояние от оста на въртене, и поради това, този диск ще има по-голям инерционен момент.

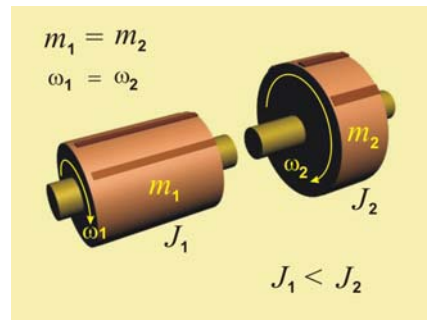
Нека сега да предположим, че посредством някакво техническо средство (например челюстна спирачка) създаваме външен момент, обратен на посоката на въртене (фиг.2). Според теоремата за кинетичния момент

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z \rightarrow \frac{d(J_z \omega)}{dt} = M_z \rightarrow$$

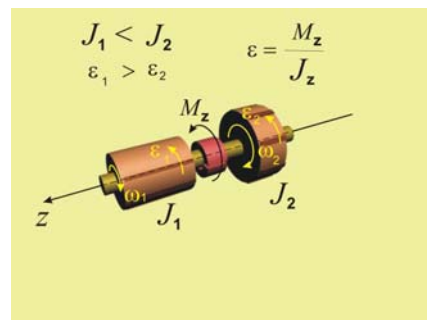
$$J_z \frac{d(\omega)}{dt} = M_z \rightarrow J_z \varepsilon = M_z$$

и окончателно $\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}$,

или приложеният момент ще създаде ъглово ускорение ε със същата посока като на момента - обратна на въртенето. Поради това за ъгловата скорост ще имаме:



Фиг.1



Фиг.2

$$\frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon \rightarrow d\omega = -\varepsilon dt$$

и като интегрираме между два момента - начален (н) и краен (к), получаваме

$$\int_{t_H}^{t_K} d\omega = - \int_{t_H}^{t_K} \varepsilon dt \rightarrow \omega_K - \omega_H = -\varepsilon (t_K - t_H).$$

Нека започнем измерването на времето от началния момент ($t_H=0$), в който дисковете се въртят с ъглова скорост $\omega_H=\omega_1=\omega_2$, а вторият момент да бъде моментът, в който дискът спира движението си ($\omega_K=0$).

Тъй като масовият инерционен момент на първото тяло от фигурата е по-малък от инерционния момент на второто тяло $\rightarrow J_1 < J_2$, то от формулата

$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z} \text{ следва, че ъгловото ускорение на второто тяло ще бъде по-малко}$$

от ускорението на първото $\rightarrow \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Като заместим тези величини в уравненията за двете тела, получаваме:

Първо тяло	Второ тяло
$\omega_{1K} - \omega_{1H} = -\varepsilon_1(t_{1K} - t_{1H})$ $0 - \omega_{1H} = -\varepsilon_1(t_{1K} - 0)$ $t_{1K} = \frac{\omega_{1H}}{\varepsilon_1}$	$\omega_{2K} - \omega_{2H} = -\varepsilon_2(t_{2K} - t_{2H})$ $0 - \omega_{2H} = -\varepsilon_2(t_{2K} - 0)$ $t_{2K} = \frac{\omega_{2H}}{\varepsilon_2}$
<p>И тъй като $\omega_{H1}=\omega_{H2}$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то следва, че</p> $t_{2K} > t_{1K}$ <p>(второто тяло ще спре за по-дълго време от първото)</p>	

(КРАЙ НА ПРИМЕР №1)

Както вече беше посочено, когато моментът на външните сили спрямо някоя от осите е нула, се получава законът за запазване на кинетичния

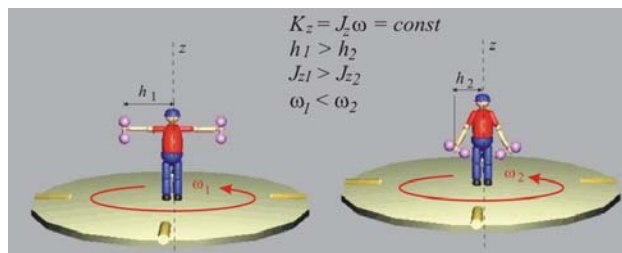
момент. Например за оста x $\frac{dK_x}{dt} = 0 \rightarrow K_x = const$,

или: **Ако моментът на външните сили спрямо някоя от осите е нула, кинетичният момент на тялото спрямо същата точка е постоянна величина.**

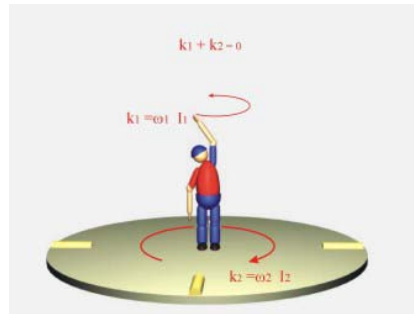
Действието на този закон може да бъде илюстрирано със следните два примера:

□ Пример №2 **Платформа на Жуковски** (стр. 197 [4]).

Върху една кръгла хоризонтална платформа, която може да се върти около ос, минаваща през центъра и перпендикулярна на равнината на платформата, се намира човек. Той е стъпил в центъра на платформата и държи в ръцете си по една тежест. Ако човекът разпери ръце и завъртим платформата с известна ъглова скорост ω_1 , достатъчно е той да прибере след това ръцете си, за да се увеличи скоростта на платформата до ω_2 (фиг.1).



Фиг.1



Фиг.2

С платформата може да бъде проведен и друг опит.

Нека човекът се намира върху неподвижна платформа. Ако започне да върти едната си ръка така, че тежестта, която държи в ръката си, да описва окръжност над главата му, ще забележим, че платформата започва да се върти в обратна посока (фиг.2)

□ Пример №3 **Падаща котка**

Един въпрос зададен от Charles Yeung на :

- Защо котката винаги пада на краката си?

Отговор :

- За да се разбере защо котката пада на краката си, трябва първо да разберете някои понятия на ротационното движение, доколкото котката се върти, докато пада.

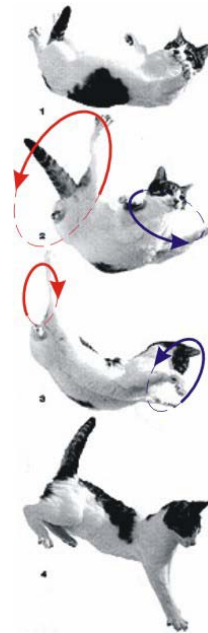
Ротационното движение е подобно на движението по права линия, но характеристиките и механичните константи са малко различни. Например вместо масата на обекта ние използваме това, което е познато като инерционен момент.

Инерционният момент на обекта се определя от разстоянието, на което масата му е разпределена спрямо оста на въртене.

Представете си топка, завързана за връв, която Вие въртите над главата си. Колкото по-дълга е връвта, толкова инерционният момент ще бъде по-голям.

Що се отнася до котката, ако тя си разпери краката и опашката, това увеличава нейния инерционен момент, и обратно, тя може да намалява инерционния си момент, като си извива тялото. Това може да го проверите, като си разтворите ръцете, докато се въртите на въртящ се стол (ако разполагате с такъв).

Точно както по-масивните обекти изискват по-голяма сила, за да се задвижат, обектите с по-голям инерционен момент имат нужда от по-голям въртящ момент, за да се завъртят. Следователно, като манипулира инерционния си момент посредством разперване и събиране на краката си и въртене на опашка, котката може да променя скоростта, с която се върти, и да контролира коя част от тялото ѝ да влезе в контакт със земята (фиг.1).



Фиг.1

Отговорил: Loren Chang, Physics Undergrad Student, UC Irvine

37. ТЕОРЕМА ЗА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА МЕХАНИЧНА СИСТЕМА

В предишна тема беше формулирана теорема за кинетичната енергия на материална точка, която гласи: "Диференциалът на кинетичната енергия на движеща се точка е равен на елементарната работа на действащата върху точката сила". Изразява се със следното уравнение:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

Тази теорема може да се обобщи за система от n на брой материални точки. При нея ще се получи система от n на брой такива уравнения - за всяка $i^{\text{та}}$ точка по едно:

$$d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dA_i.$$

Като се сумират левите и десните страни на уравненията от тази система, се получава:

$$\sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^n dA_i \quad \text{и} \quad d\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^n dA_i.$$

В лявата страна на това равенство, $\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = E$ е кинетичната енергия

на системата. Така се получава

$$dE = \sum_{i=1}^n dA_i.$$

Това уравнение изразява в диференциална форма теоремата за кинетичната енергия на механична система, която гласи: **"Диференциалът на кинетичната енергия на механична система е равен на сумата от елементарната работа на действащите върху точката външни и вътрешни сили"**.

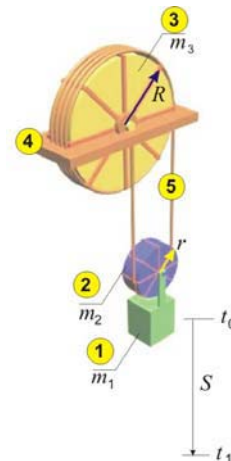
В техническите задачи често механичните процеси се разглеждат в даден период от време между два момента - нулев t_0 (начален) и краен t_1 . Интегрирането на уравнението от закона между тези два момента може да се проведе в следната последователност:

$$dE = \sum_{i=1}^n dA_i \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dE = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n dA_i \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dE = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} dA_i \rightarrow E_1 - E_0 = \sum_{i=1}^n A_i$$

или: Промяната на кинетичната енергия на системата е равна на пълната работа на приложените сили.

Всеки инженер, който реши да използва уравнението от тази теорема при решаване на конкретни проблеми, трябва да умее да определя кинетичната енергия на телата, съставлящи системата, за да формира лявата част на равенството, и да определя работата на сили, действащи върху системата, за да формира дясната част на равенството. В някои случаи това може да се окаже не толкова лесна задача, тъй като телата от механичните системи понякога извършват сложни движения. За най-често срещаните в техниката движения (транслационно, ротационно и равнинно) приложението на теоремата ще бъде илюстрирано със следния пример:

Механична система от три тела с известни маси и размери (фиг.1) преминава в момента t_0 от покой в движение, при което тялото ① се движи транслационно вертикално надолу и до момента t_1 изминава път S . Тялото ② представлява диск, оста на който е свързана с тяло ① така, че се движи заедно с него. През диска е прехвърлена гъвкава неразтеглива нишка ⑤, единият край на която е закрепен върху неподвижна платформа ④, а другият край е навит около диска ③. По време на движението няма приплъзване между нишката и дисковете. Оста на диска ③ също е закрепена



Фиг.1

върху неподвижната платформа. Осите на двата диска са лагерувани, което позволява свободното им въртене по време на движението.

Илюстрацията ще се състои във формиране за тази система на уравнението от теоремата за кинетичната енергия.

Тъй като телата са три, членовете на уравнението ще носят долни индекси от 1 до 3, които ще показват за кое тяло се отнасят, и горни индекси, които ще означават момента, за който се отнасят ("⁽⁰⁾" за $t=t_0$ и "⁽¹⁾" за $t=t_1$). Така уравнението на теоремата става

$$E^{(1)} - E^{(0)} = \sum_{i=1}^n A_i$$

1. Лева част на уравнението - кинетични енергии

Системата се състои от три тела, които ще бъдат разгледани поотделно.

- Тяло ① (фиг.2).

Тъй като това тяло извършва транслационно движение и всички точки имат еднакви скорости, кинетичната му енергия се определя както при материална точка:

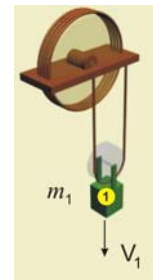
$$E_1 = \frac{m_1(V_1)^2}{2},$$

където V_1 е скоростта на масовия център на тялото.

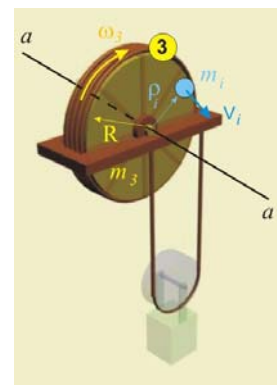
Тялото ② има най-сложно движение, така че ще бъде разгледано последно.

- Тяло ③ .

Това тяло представлява диск, който се върти около неподвижна ос (ротационно движение). За осите като конструктивен елемент е предвидена специална тема, така че засега тази ос ще бъде приета за линия $a-a$, около която се върти дискът (фиг.3).



Фиг.2



Фиг.3

Ако разгледаме една точка (i) от диска, отстояща на разстояние ρ , то скоростта на тази точка ще бъде $V = \omega R$, а кинетичната енергия

$$E_i = \frac{m_i(V_i)^2}{2} = \frac{m_i(\omega_3 \rho_i)^2}{2} = \frac{\omega_3^2}{2} m_i(\rho_i)^2.$$

Кинетичната енергия на тялото ще бъде сумата от кинетичната енергия на всичките му точки

$$E_3 = \sum E_i = \sum \frac{\omega_3^2}{2} m_i(\rho_i)^2 = \frac{\omega_3^2}{2} \sum m_i(\rho_i)^2.$$

Сумата $J_3 = \sum m_i(\rho_i)^2$ е масовия инерционен момент на тялото. Така за кинетичната енергия на тялото окончателно се получава

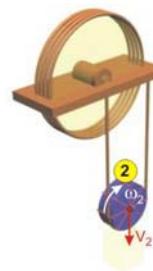
$$E_3 = \frac{J_3(\omega_3)^2}{2}.$$

- Тяло ②

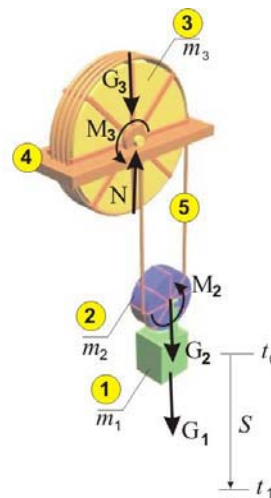
Това тяло е диск, който извършва най-сложното движение от телата в системата. От една страна, оста на диска е свързана с тялото ① и се движи заедно с него вертикално надолу със скорост V_2 (фиг.4). От друга страна, нишката, която е прехвърлена през диска, го свързва с тялото ③ и предизвиква завъртане с ъглова скорост ω_2 . Такова движение, което може да се разглежда като съвкупност от две движения - преместване (**транслационно** движение) и завъртане (**ротационно** движение) - вече беше разгледано в темата за **равнинно** движение. При това движение кинетичната енергия може да бъде получена като сума от кинетичните енергии на двете движения:

$$E_2 = \frac{m_2(V_2)^2}{2} + \frac{J_2(\omega_2)^2}{2},$$

където V_2 е скоростта на масовия център на тялото (центъра на диска).



Фиг.4



Фиг.5

С това нещата в лявата страна на равенството са изяснени и може да се премине към дясната страна на равенството, която съдържа работата A_i на силите, действащи върху системата.

Като се пренебрегне теглото на нишката, върху системата остават да действат шест сили и моменти (силите на тежестта G_1 , G_2 и G_3 , реакцията на платформата N и моментите на триенето в лагерите M_2 и M_3 , фиг.5), които ще бъдат разгледани по отделно.

- Сили на тежестта на първото тяло G_1 , и на второто тяло G_2

При тези сили работата се определя лесно, тъй като направлението и посоката на силите съвпада с направлението и посоката на преместването:

$$AG_1 = G_1 \cdot S; \quad AG_2 = G_2 \cdot S$$

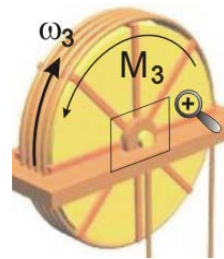
- От условието оста на третото тяло да е неподвижна следва, че силата на тежестта на второто тяло G_2 и реакцията на платформата N се уравниават. Освен това, когато приложената точка няма преместване, силата не извършва работа. Следователно $AG_3 = 0$, $A_N = 0$.

- Моменти на триенето M_2 и M_3 .

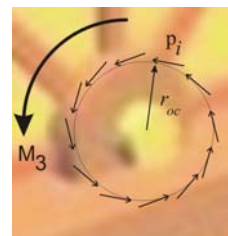
В зависимост от начина на лагериране при осите на двата диска се получават моменти на триене, съпротивляващи се на движението и насочени обратно на посоката на ъгловата скорост (фиг.6 за третото тяло). Тези моменти се пораждат от сили на триене в точките по околната повърхност на оста, където тя контактува с диска. Например, ако радиусът на оста на третото тяло е r_{oc} (фиг.7) и силата на триене в една $i^{та}$ точка е p_i , моментът на тази сила ще бъде $M_i = p_i r_{oc}$. Пълният момент на триене ще бъде

$$M_3 = \sum M_i = \sum p_i r_{oc} = r_{oc} \sum p_i$$

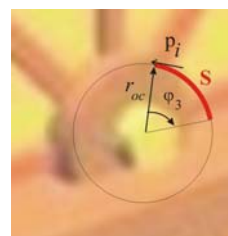
Ако дискът се завърти на ъгъл φ_3 , приложената точка на силата p_i ще измине път S , равен на дължината на дъгата на централен ъгъл φ_3 в



Фиг.6



Фиг.7



Фиг.8

окръжност с радиус r_{oc} . От геометрията се знае, че $S = \varphi_3 r_{oc}$ (фиг.8). Тогава извършената работа ще бъде $A_i = -p_i S = -p_i \varphi_3 r_{oc}$. Работата е отрицателна, тъй като преместването е в посока, обратна на посоката на силата. Пълната работа ще бъде $A_{M_3} = \sum A_i = -\varphi_3 r_{oc} \sum p_i$ и понеже $r_{oc} \sum p_i = M_3$, се получава

$$A_{M_3} = -\varphi_3 M_3.$$

Аналогично за момента на триене в оста на второто тяло може да бъде записано:

$$A_{M_2} = -\varphi_2 M_2.$$

Тъй като по условие е дадено преместването S , за окончателното определяне на работата е необходимо двата ъгъла на завъртане φ_2 и φ_3 да бъдат изразени чрез това преместване. Например, ако разгледаме два момента от движението на второто тяло (фиг.9), ще видим, че за да се придвижи центърът на диска вертикално надолу на разстояние S , той трябва да измине път (да се претъркаля) по нишката с дължина $\overline{kn} = S$. От условието да няма преплъзване между нишката и диска следва, че дъгата на ъгъла на завъртане ще бъде равна на изминатия път -

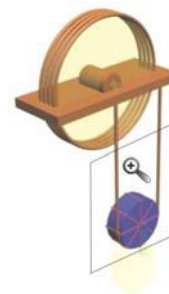
$\widehat{k_1 n} = \overline{kn} = S$. От геометрията се знае, че централният

ъгъл на тази дъга е $\widehat{k_1 n} = r \varphi_2$, откъдето

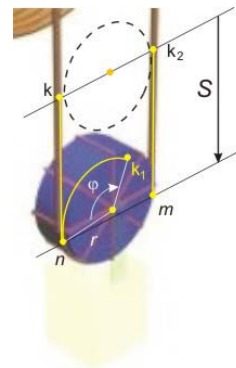
$$\varphi_2 = \frac{\widehat{k_1 n}}{r} \quad \text{или също} \quad \varphi_2 = \frac{S}{r}.$$

От фиг.9 се вижда също, че за да се извърши движението, нишката трябва да се удължи с $\overline{kn} + \overline{k_2 m} = 2S$

От условието, че нишката е неразтеглива, следва, че това удължение може да се реализира само чрез



Фиг.9



развиване на нишка от третото тяло чрез завъртането му на ъгъл φ_3 . Като се вземе предвид, че дългата на този ъгъл трябва да бъде $2S$, а радиусът на диска е R , се получава

$$\varphi_3 = \frac{2S}{R}.$$

Така, за дясната страна на уравнението се получава

$$\Sigma A_i = AG_1 + AG_2 + AG_3 + A_N + A_{M2} + A_{M3} = G_1 \cdot S + G_2 \cdot S + 0 - \frac{S}{r} M_2 - \frac{2S}{R} M_3$$

и

$$\Sigma A_i = (G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{2M_3}{R}) S.$$

Сега да се върнем към уравнението на теоремата:

$$E^{(1)} - E^{(0)} = \sum_{i=1}^n A_i \rightarrow (E_1 + E_2 + E_3)^{(1)} - (E_1 + E_2 + E_3)^{(0)} = (G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{2M_3}{R}) S.$$

В началния момент тялото е в покой, така че скоростите на телата са нула. От това следва:

$$E_1^{(0)} = \frac{m_1 (V_1^2)^{(0)}}{2} = \frac{m_1 \cdot 0}{2} = 0, \quad E_2^{(0)} = \frac{m_2 (V_2^2)^{(0)}}{2} + \frac{J_2 (\omega_2^2)^{(0)}}{2} = \frac{m_2 \cdot 0}{2} + \frac{J_2 \cdot 0}{2} = 0,$$

$$E_3^{(0)} = \frac{J_3 (\omega_3^2)^{(0)}}{2} = \frac{J_3 \cdot 0}{2} = 0,$$

или

$$(E_1 + E_2 + E_3)^{(0)} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Така уравнението добива вида

$$(E_1 + E_2 + E_3)^{(1)} - 0 = (G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{2M_3}{R}) S.$$

Като заместим получените изрази за кинетичната енергия и работата и като пропуснем горния индекс, тъй като е ясно, че параметрите в

уравненията важат за крайния момент на движението, уравнението се получава

$$\frac{m_1(V_1^2)}{2} + \frac{m_2(V_2^2)}{2} + \frac{J_2(\omega_2^2)}{2} + \frac{J_3(\omega_3^2)}{2} = \left(G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{2M_3}{R} \right) S.$$

В различните задачи всеки един (но само един) от параметрите, участващ в уравнението, може да бъде разглеждан като неизвестен. Нека да разгледаме случай, в който за поставения пример се търси скоростта на първото тяло в края на движението при известни сили, или $V_1^{(t)}=?$. Тъй като освен тази скорост неизвестни се явяват и останалите скорости, на пръв поглед задачата е нерешима, тъй като се разполага с едно уравнение за тяхното определяне. Телата обаче образуват механична система, което означава, че движението им е взаимнообвързано. Това може да се използва, за да се изразят всички скорости само чрез тази, която се търси. Тъй като в случая това е скоростта на първото тяло, за целта ще бъде разглеждано движението на останалите тела.

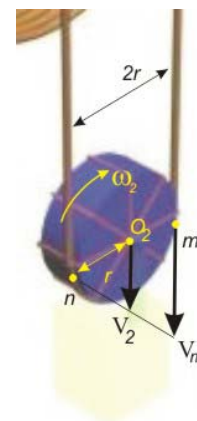
Тялото ② е свързано с първото тяло така, че по време на движението центърът на диска има същата скорост като него

$$\text{или } V_2 = V_{O_2} = V_1 \quad (\text{Фиг.10}).$$

От друга страна, скоростта на центъра на диска може да бъде определена като скорост на точка от тяло, извършващо равнинно движение с моментен център на въртене в т.п.: $V_2 = \omega_2 r$.

Тъй като левите страни на двете уравнения са равни (и двете съдържат само V_2), то и десните страни трябва да бъдат равни: $V_1 = \omega_2 r$, от където се получава

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r}.$$



Фиг.10

Моментният център на скоростите в този случай се определя по следната логика: Левият клон на нишката е неподвижно свързан с платформата, поради което всички точки от този клон са неподвижни, включително и т.п, в която дискът контактува с нишката. Тъй като по условие няма приплъзване между диска и нишката, тази точка може да бъде разглеждана и като неподвижна точка от диска, което значи, че е моментен център на въртене.

Второто и третото тяло са свързани посредством десния клон на нишката. Тъй като нишката е неразтеглива, всички точки от нея ще имат еднакви скорости. Скоростта на т.м може да бъде определена като скорост на точка от тяло (фиг.10), извършващо равнинно движение с моментен център на въртене в т.п (няма приплъзване между нишката и тялото):

$$V_m = \omega_2 2r = \frac{V_2}{r} 2r = 2V_2 \quad \text{или} \quad V_m = 2V_1$$

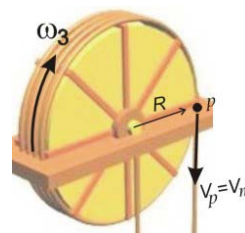
Същият клон на нишката контактува с третото тяло в т.р (фиг.11). От една страна, скоростта на тази точка може да бъде определена като на точка от нишката:

$$V_p = V_m,$$

а от друга - като скорост на точка от тяло, извършващо ротационно движение с ъглова скорост ω_3 : $V_p = \omega_3 R$.

Тъй като левите страни на двете уравнения са равни (и двете съдържат само V_p), то и десните страни трябва да бъдат равни: $V_m = \omega_3 R$, откъдето се получава

$$\omega_3 = \frac{V_m}{R} \quad \text{или} \quad \omega_3 = \frac{2V_1}{R}.$$



Фиг.11

Като се заместят получените връзки между скоростите, уравнението на теоремата добива вида

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_1^2}{2} + \frac{J_2 \left(\frac{V_1}{r} \right)^2}{2} + \frac{J_3 \left(\frac{2V_1}{R} \right)^2}{2} = \left(G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{2M_3}{R} \right) S,$$

$$V_1^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{J_2}{r^2} + \frac{4J_3}{R^2} \right) = 2 \left(G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{2M_3}{R} \right) S$$

и

$$V_1 = \sqrt{\frac{2S \left(G_1 + G_2 - \frac{M_2}{r} - \frac{M_3}{R} \right)}{m_1 + m_2 + \frac{J_2}{r^2} + \frac{J_3}{R^2}}}.$$

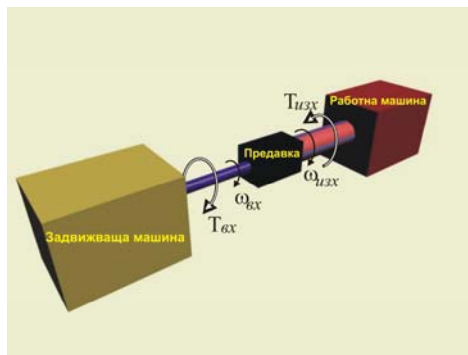
40. ПРЕДАВКИ¹

ОБЩИ СВЕДЕНИЯ

Предавките осъществяват връзката между задвижващата и работната машина, като в повечето случаи променят параметрите на предаваното движение. Обикновено се променят скоростите, силите и моментите, но в някои случаи се променят характерът и законът на движението (въртливо в постъпателно, равномерно в променливо).

Един от основните параметри на предавката е *предавателното*

отношение $i = \frac{\omega_{вх}}{\omega_{изх}}$,



Фиг. 1

където $\omega_{вх}$ и $\omega_{изх}$ са ъгловите скорости съответно на входящия и изходящия вал (фиг.1).

Ако се пренебрегнат загубите в предавката, от закона за запазване на енергията се получава

$$P_{вх} = T_{вх} \cdot \omega_{вх} = P_{изх} = T_{изх} \cdot \omega_{изх},$$

$$\text{т.е. } \frac{\omega_{вх}}{\omega_{изх}} = \frac{T_{изх}}{T_{вх}},$$

$$\text{или } T_{изх} = i \cdot T_{вх},$$

където: $P_{вх}$ и $P_{изх}$ са съответно входящата и изходящата мощност, W ;

$T_{вх}$ и $T_{изх}$ - входящият и изходящият въртящ момент, Nm .

В зависимост от посоката на предаване на мощността една предавка може да работи като *редуктор* ($i > 1$) или *мултипликатор* ($i < 1$).

Загубите в предавката се отчитат с *коэффициента на полезно действие* (к. п. д.) η :

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{вл}} = \frac{P_{изх}}{P_{вх}},$$

където: $A_{пол}$ е полезната работа, J ; $A_{вл}$ - вложената работа, J .

$$\text{Оттук } T_{изх} = i \cdot T_{вх} \cdot \eta$$

Предавките могат да осъществяват постоянно ($i = const$) или променливо ($i \neq const$ - например вариаторите) предавателно отношение.

¹ Материалът е разработен със съдействието на доц. Димитър Караиванов, кат."Приложна механика", ХТМУ-София

Според принципа на работа предавките биват: *механични, хидравлични, електро-*

цност, предавателно отношение, к. п. д., разположение на входящия и изходящия вал (междусосово разстояние, междусосов ъгъл), обем, маса, цена.

Механичните предавки според принципа си на работа биват: *предавки чрез триене* (триещи, ремъчни), *предавки чрез зацепване* (зъбни, верижни).

Според наличието на междинен елемент: *индиректни* (ремъчни, верижни), *директни* (зъбни, триещи).

Когато директната предавка се състои от два елемента (а индиректната – и от междинен елемент), тя се нарича *едностъпална*. *Многостъпалната* предавка се състои от няколко последователно свързани едностъпални предавки, с цел получаване на по-голямо предавателно отношение.

За постигане на по-голямо предавателно отношение могат да се използват няколко последователно свързани предавки от един вид или от различни видове. Тогава общото предавателно отношение i е равно на $i = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \dots$, където i_1, i_2, i_3 и т.н. са предавателните отношения на съставящите предавки.

Аналогична зависимост се получава и за общия к.п.д. η :

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots,$$

където i_1, i_2, i_3 и т.н. са к. п. д. на съставящите предавки.

ЗЪБНИ ПРЕДАВКИ

Те предават движението чрез зацепване на зъбни колела, чиито зъби имат определен профил.

В тесен смисъл под зъбна предавка се разбира тризвенов зъбен механизъм (фиг. 2), съставен от две зъбни колела. В широк смисъл това е цялостно изделие, състоящо се от няколко зъбни колела, валове, лагери, уплътнения, охлаждаща система и евентуално корпус с капак (фиг.3).

Зъбните предавки са се наложили като най-разпространен вид механични предавки в машиностроенето и уредостроенето благодарение на своите *предимства*:

- осигуряване на постоянно предавателно отношение;
- създаване на сигурна връзка между агрегатите;
- възможност за предаване на големи мощности;
- висок к. п. д.;
- безшумност (при точна изработка и добро мазане)
- компактност; дълготрайност,
- надеждност и просто обслужване.



Фиг.2



Фиг.3

Таблица 1

хиперболоидни предавки			конусни предавки	цилиндрични предавки	
хипоидна	червячна	винтова			
	външно				зацепване
	вътрешно				
	спироидна				
					увеличаване
					онгъшно
					ребенно

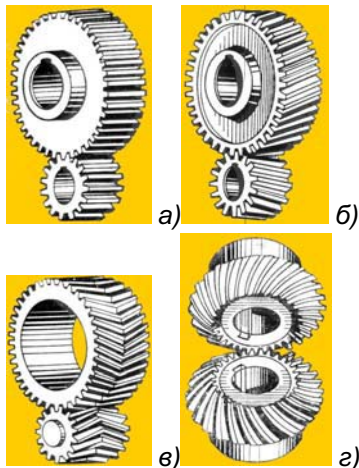
Недостатъци:

- сравнително сложна изработка;
- предаване на ударните натоварвания;
- увеличаване на нивото на шума при неточна изработка;
- неподходящи за големи междуосови разстояния на валове на свързаните агрегати.

Класификация

Според взаимното разположение на геометричните оси на колелата:

- с успоредни оси (цилиндрични зъбни предавки);
- с пресичащи се оси (конусни зъбни предавки);
- с кръстосани оси (хиперболоидни зъбни предавки).



Фиг.4

В последната група влизат винтовите, червячните, хипоидните, спироидните зъбни предавки.

Според надлъжната форма на зъбите:

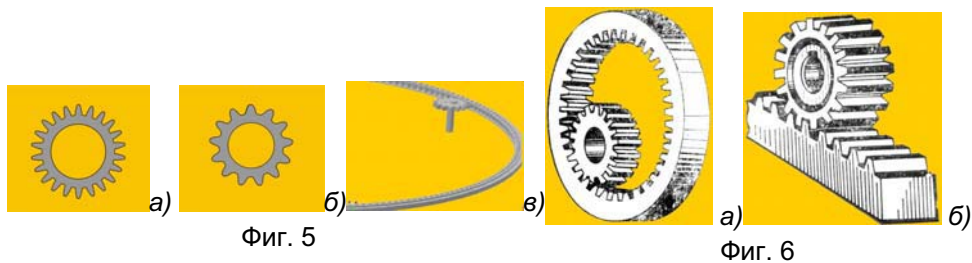
- с прави зъби – възможна е при цилиндричните и конусните зъбни предавки (фиг.4а);
- с наклонени зъби – цилиндрични, конусни зъбни предавки (фиг.4б);
- със стреловидни (шевронни) зъби – цилиндрични зъбни предавки (фиг.4в);
- с криволинейни зъби – хиперболоидни зъбни предавки (фиг.4г).

Според формата на работния профил на зъбите:

- еволвентни (фиг.5а) ;
- циклоидни (фиг.5б);
- цевни (фиг.5в) и др.

Според разположението на зъбите върху колелата:

- с външни зъби (фиг.4);
- с вътрешни зъби (фиг.6а);
- зъбен гребен (фиг.6а) – граничен случай между горните два, при който зъбното колело (т. нар. зъбен гребен) има безкрайно голям брой зъби и извършва транслационно движение.



Според относителното движение на геометричните оси на валовете на зъбните колела:

- предавки с неподвижни оси;
- планетни предавки







РЕМЪЧНИ ПРЕДАВКИ

Предават движението с помощта на ремък, при което се разчита на силата на триене между ремъка и монтираните върху валовете ремъчни шайби (фиг.1).



Фиг.1

Ремъкът може да бъде

 плосък,  клинов,  двойно трапецовиден,  кръгъл,  поликлинно,  зъбен (за предаване на движението без приплъзване).

Ремъчните предавки се използват както като силови (обикновено до 50 kW, но се срещат и до 3000 kW), така и като кинематични предавки.

Техните предимства са:

- безшумни;
- подходящи за големи честоти на въртене²;
- не предават ударните натоварвания (еластичен ремък и възможност за приплъзване);
- подходящи за големи междуосови разстояния;
- възможност за свързване на валове с кръстосани геометрични оси (особено при кръгъл и двойно трапецовиден ремък);
- ниска себестойност;

Недостатъци:

- непостоянно предавателно отношение поради приплъзването;
- голямо радиално натоварване на валовете;
- по-големи габарити (в сравнение със зъбните и верижните предавки);
- необходимост от честа смяна на ремъка (1000 ÷ 5000 часа);
- необходимост от опъващо устройство.

Предавателното отношение се влияе от неизбежното приплъзване (фиг.2)

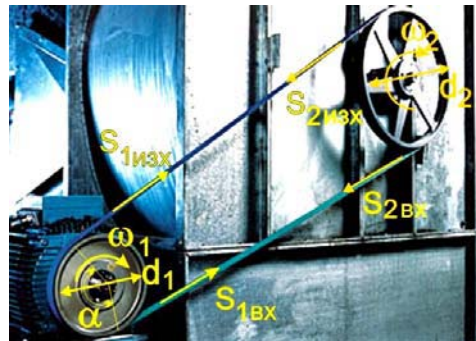
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} \approx \frac{d_2}{d_1}$$

където:

ω_1 и d_1 са ъгловата скорост и диаметърът на задвижващата шайба;

ω_2 и d_2 са ъгловата скорост и диаметърът на задвижваната шайба;

$\varepsilon = 0,01 \div 0,02$ - коефициентът на приплъзване между ремъка и ремъчната шайба.



Фиг.2

² Периферни скорости:

- за плосък ремък от 5 до 30 m/s (за синтетичен ремък до 100 m/s);
- за клиновиден ремък до 25 ÷ 30 m/s .

При предаване на теглителната сила F_t чрез триене е необходимо да се спази Ойлеровата зависимост

$$\frac{S_{ex}}{S_{изх}} \leq e^{\mu \cdot \alpha},$$

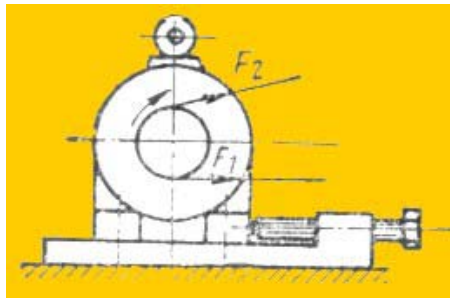
където: S_{ex} и $S_{изх}$ са входящата и изходяща опънова сила в ремъка ($S_{ex} - S_{изх} = F_t$);

$e = 2,71$ - основата на натуралния логаритъм;

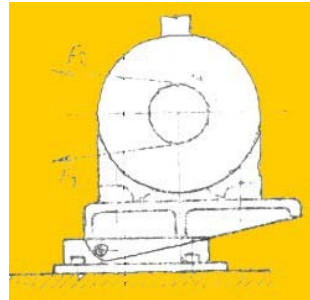
μ - коефициентът на триене между ремъка и ремъчната шайба;

α - ъгълът на обхвата на ремъка (фиг.2), *rad*.

Необходимата опънова сила се осигурява от еластичната деформация на ремъка. Тъй като в процеса на работа част от еластичните деформации преминават в пластични, е необходимо да се предвиди опъващо устройство, което да поддържа необходимата големина на $S_{изх}$. Тук са показани някои от най-често използваните опъващи устройства.

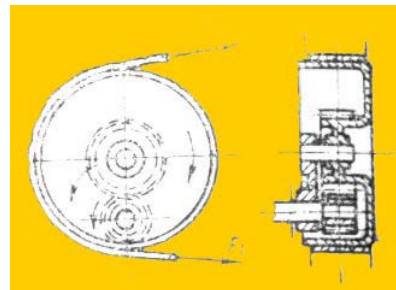
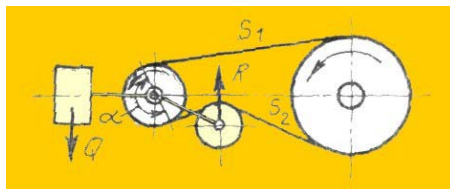


Периодично опъване чрез изместване на едната шайба.



Опъване от собственото тегло на двигателя.

Опъване с опъваща ролка, поставена върху отпуснатата страна на ремъка. Автоматично опъване.



ВЕРИЖНИ ПРЕДАВКИ

Предават движението с помощта на верига, която се зацепва с верижни колела, монтирани върху валовете (фиг.1).

На фиг.2 са показани различни видове вериги.

В зависимост от предназначението си верижните предавки са:

- *товароподемни* – в подъемните механизми на кранове, телфери, кари-високоповдигачи, палубни механизми и др.;
- *теглителни* – в някои видове транспортъори;
- *преводни* – в механичните предавки, които се разглеждат в този лекционен курс.



Фиг.1



Фиг.2

На фиг.3 е показана най-често използваната в механичните предавки *ролкова верига*.



Фиг.3

Предимствата на верижните предавки в сравнение с ремъчните са:

- по-висок к. п. д. (0,94 – 0,98);
- по-голяма товароносимост;
- липса на приплъзване – постоянно средно предавателно отношение;
- по-малко радиално натоварване на валовете.

Недостатъци:

- по-шумни;
- неподходящи за високи периферни скорости – до 6 m/s , а при картерно мазане до 12 m/s (поради по-големите динамични натоварвания);
- нуждаят се от смазване;
- веригата е по-скъпа и по-тежка от ремъка.

Предавателното отношение обикновено е $7\div 10$ и има постоянна средна стойност

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

където z_1 е броят на зъбите на малкото колело, а z_2 - броят на зъбите на голямото колело.

За добрата работа на предавката е достатъчно да се осигури минимална опъваща сила в ненатоварения клон, за да не провисва веригата. По-благоприятно за предавката е задвижващото колело да се разположи по-ниско от задвижваното и долният клон на веригата да е натоварен (намалява се опасността от изваждане на веригата от зъбното колело).

ЛИТЕРАТУРА

При изготвяне на тези записки и на курса като цяло са следвани традициите за преподаване на дисциплината в кат. "Приложна механика" и са използвани следните литературни източници, които препоръчвам и като източник на допълнителна информация при подготовка за изпита:

1. Д. Панчовски, К. Попов Техническа механика. *Техника*, С., 1994
2. М. Попова, Д. Панчовски Приложна механика. *Техника*, С., 1993

от където са заимствани основните теоретични постановки на повечето теми и общата методика на курса.

3. Д. Панчовски, К. Попов Теоретична механика. *Техника*, С., 1974
4. С. П. Тимошенко История науки о сопротивлении материалов. *ГИТТЛ*, М., 1957

от където са повечето примери в изложението.

5. К. Арнаудов и др. Машинни елементи. *Техника*, 1980,
6. В. Игнатов, И. Ингилизов Ръководство за упражнения по приложна механика, II-ра част, Машинни елементи. *Техника*, 1988,

от които са заимствани теоретичните постановки и конкретните подходи при подготовка на темите, съдържащи елементи на машините и апаратите.

